

CdL Professioni Sanitarie
A.A. 2012/2013

Unità 4 (5 ore)

- Statica dei fluidi
 - Fluidi e solidi
 - Densità e pressione di un fluido
 - Proprietà dei fluidi: legge di Pascal, legge di Stevino
 - Principio di Archimede: galleggiamento
 - Pressione atmosferica e barometro a mercurio
 - Manometri a tubo aperto e misura della pressione relativa
 - Applicazione: misura della pressione del sangue

- Dinamica dei fluidi
 - Portata ed equazione di continuità
 - Legge di Bernoulli: aneurisma
 - Fluido viscoso: moto laminare e turbolento
 - Viscosità
 - Moto di un fluido viscoso: legge di Poiseuille
 - Applicazione: circolazione del sangue nel corpo umano
 - Applicazione: velocità di sedimentazione
 - Tensione superficiale e capillarità

CdL Professioni Sanitarie
A.A. 2012/2013

Statica dei fluidi

Fluidi e solidi

Le sostanze materiali si trovano principalmente in uno dei 3 seguenti stati:

- **solido**: caratteristica di un solido è quella di avere *volume e forma* definiti → grande rigidità
- **liquido**: caratteristica di un liquido è quella di avere un *volume* definito, ma non una forma propria → assenza di rigidità
- **gassoso**: caratteristica di un gas è quella di non avere né volume né forma definiti → assenza di rigidità. Un gas tende ad occupare tutto il volume a sua disposizione.

Molte sostanze si possono trasformare da uno stato all'altro al variare di temperatura e pressione, come ad esempio l'acqua (vapore, acqua liquida e ghiaccio).

Le diverse proprietà fisiche della materia nei diversi stati dipendono dalle forze tra le molecole di cui una sostanza è costituita. La grande rigidità nei solidi è dovuta al fatto che le sue molecole sono saldamente legate tra loro in posizioni fisse. Invece nei liquidi le molecole sono libere di muoversi (scorrere) l'una rispetto all'altra, anche se la forte attrazione molecolare le mantiene molto vicine tra loro e fa sì che i liquidi mantengano un volume definito. Nei gas, infine, le molecole praticamente non esercitano forze significative tra di loro (tranne durante le collisioni).

Densità

La **densità** di un corpo è il rapporto tra la sua massa M ed il suo volume V :

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Grandezza derivata: $[\rho] = [M/V] = [M]/[V] = [M]/[l]^3$.

Unità di misura nel SI: kg/m^3 .

Di frequente ρ è riportata in g/cm^3 (unità cgs):

$$1 \text{ g/cm}^3 = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{(10^{-2} \text{ m})^3} = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} = 10^{-3+6} \text{ kg/m}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$$
$$1 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

Le densità di alcuni fluidi (ed anche alcuni solidi) comuni sono riportate nella Tabella 2.1 del Monaco-Sacchi-Solano. In generale, esse dipendono dalla temperatura e dalla pressione, ma per i liquidi ed i solidi la variazione è piccola.

<i>Sostanza</i>	<i>Densità, g/cm³</i>	<i>Densità, kg/m³</i>	(a 20 ⁰ C e 1 atm)
Piombo	11.3	11300	
Acqua pura	1	1000	
Aria	0.0012	1.2	

<i>Sostanza</i>	<i>Densità, g/cm³</i>	<i>Densità, kg/m³</i>	(a 37 ⁰ C e 1 atm)
Sangue (plasma)	1.03	1030	
Sangue (intero)	1.06	1060	

NB: per definizione, la densità dell'acqua a 4⁰ C è esattamente 1 g/cm³. Infatti, il grammo è stato originariamente definito come la massa di 1 cm³ di acqua pura a questa temperatura.

Esercizio: la massa di 1.5 cm³ di mercurio è 0.02 kg. Qual è la sua densità? Qual è la massa di 1 m³ di mercurio?

$$M = 0.02 \text{ kg} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

$$V = 1.5 \text{ cm}^3 = 1.5 \cdot (10^{-2} \text{ m})^3 = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\rho = M/V = (2 \cdot 10^{-2} \text{ kg}) / (1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3) = 1.33 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$$

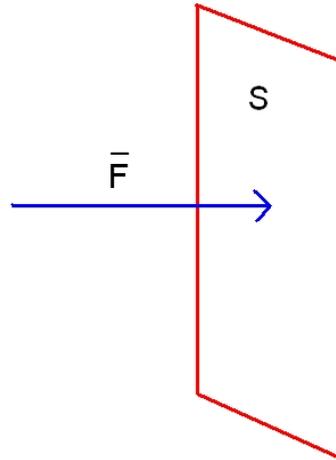
$$M = \rho V = (1.33 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3) \cdot (1 \text{ m}^3) = 1.33 \cdot 10^4 \text{ kg}$$

Esercizio: una sostanza ha una densità di 4.5 g/cm³. Calcolare la sua densità in kg/m³. Qual è la massa di tale sostanza contenuta in 1 cm³?

Pressione

La pressione esercitata da una forza \vec{F} che agisce su di una superficie S e che **ha direzione perpendicolare ad S** è:

$$p = \frac{F}{S}$$



Grandezza derivata $\rightarrow [p] = [F/S] = [F]/[S] = [F]/[l]^2$.

Unità di misura nel SI: 1 Pascal (Pa) = 1 N/m².

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2)/\text{m}^2 = 1 \text{ kg/m/s}^2$$

Unità di misura comuni sono anche le *atmosfera* (atm), i *mm di Hg* (mmHg o Torr) e i *bar* (bar) (Tabella 7.1, Cromer).

Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: tabella 7.1

NB: non semplificare mai l'unità mmHg.

Esercizio: calcolare la pressione esercitata sul suolo dai cingoli di una ruspa avente una massa di 5000 kg. Il suolo è orizzontale. L'area complessiva della superficie di appoggio dei cingoli è di 5 m².

$$\begin{aligned} m &= 5000 \text{ kg} & S &= 5 \text{ m}^2 \\ F_g &= m \cdot g = (5000 \text{ kg}) \cdot (10 \text{ m/s}^2) = 5 \times 10^4 \text{ N} \\ p &= F_g/S = (5 \times 10^4 \text{ N})/(5 \text{ m}^2) = 10^4 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Esercizio (dal problema 4, pag. 159, Cromer): la pressione sistolica del sangue in un paziente è di 200 mmHg. Effettuare la conversione in Pascal.

$$\begin{aligned} 1 \text{ mmHg} &= 133 \text{ Pa} \\ x : (200 \text{ mmHg}) &= (133 \text{ Pa}) : (1 \text{ mmHg}) \\ x &= [(200 \text{ mmHg}) \cdot (133 \text{ Pa})]/(1 \text{ mmHg}) = 26600 \text{ Pa} = 2.66 \cdot 10^4 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Proprietà dei fluidi: legge di Pascal e legge di Stevino

I fluidi in quiete godono di alcune proprietà particolari che derivano dalla loro assenza di rigidità. Esse si possono dimostrare a partire dai principi della Statica.

- **Proprietà 1:** *un fluido in quiete non può esercitare una forza tangente ad una superficie.*
- **Proprietà 2 o legge di Pascal:** *in assenza di gravità, trascurando cioè il peso del fluido stesso, la pressione in un fluido in quiete è la stessa dappertutto.*
- **Proprietà 3 o legge di Stevino:** *in presenza di gravità, in un fluido in quiete la differenza di pressione tra due punti A e B, situati alle profondità h_A e h_B , è data da:*

$$p_A - p_B = \rho g(h_A - h_B)$$

NB1: h_A e h_B si assumono positive se misurate verso il basso a partire dalla superficie libera del fluido.

NB2: la legge di Stevino è valida per recipienti di forma qualunque. La pressione in un punto del fluido dipende dalla distanza del punto dalla superficie del fluido, **non** dalla forma del contenitore.

NB3: in punti che si trovano allo stesso livello di profondità la pressione è la stessa.

NB4: la legge di Pascal è un caso particolare delle leggi di Stevino se risulta possibile trascurare il peso del fluido ($\rho gh \simeq 0$).

Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: figura 7.8 e 7.9

Esercizio (dal problema 15, pag. 160, Cromer): del plasma scorre attraverso un tubicino ad una vena di un paziente. Se la flebo viene tenuta ad una altezza di 1.6 m rispetto al braccio, qual è la differenza di pressione tra il plasma nella vena e quello nella flebo?

Livello A → livello della vena

Livello B → livello del liquido nella flebo

$\rho_p = 1030 \text{ kg/m}^3 = 1.03 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \rightarrow$ densità del plasma

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= \rho_p g (h_A - h_B) = (1.03 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \cdot (10 \text{ m/s}^2) \cdot (1.6 \text{ m}) \\ &= 1.65 \times 10^4 \text{ kg/m/s}^2 = 1.65 \times 10^4 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Esercizio: un subacqueo si trova immerso in un lago ad una profondità $h = 40 \text{ m}$. Qual è la pressione di tutta l'acqua soprastante sul sub (si assuma che la densità dell'acqua del lago sia 1 g/cm^3)?

Principio di Archimede

Il Principio di Archimede governa il galleggiamento dei corpi. Esso è una conseguenza delle proprietà dei fluidi sopra esposte.

La spinta esercitata da un fluido su un corpo è uguale al peso del fluido spostato dal corpo.

$$F_b = F_A - F_B = m_F g$$

$m_F = \rho_F V$ è la massa di un volume di fluido uguale al volume del corpo immerso.

Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: figura 7.17 Monaco-Sacchi-Solano,
Elementi di Fisica: figura 3.5

Esercizio: una tavola di legno avente un volume di 3000 cm^3 si trova immersa in un fiume. Sapendo che la densità del legno è $\rho_l = 0.7 \text{ g/cm}^3$, calcolare la forza peso e la spinta di Archimede che agiscono sulla tavola. Essa affonda o galleggia?

$$V = 3000 \text{ cm}^3 = 3 \times 10^3 \cdot (10^{-2} \text{ m})^3 = 3 \times 10^3 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\rho_l = 0.7 \text{ g/cm}^3 = 700 \text{ kg/m}^3 = 7 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_a = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$m_l = \rho_l \cdot V = (7 \times 10^2 \text{ kg/m}^3)(3 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 21 \times 10^{-1} \text{ kg} = 2.1 \text{ kg}$$

$$F_g = m_l g = (2.1 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 21 \text{ N}$$

$$m_F = \rho_a \cdot V = (10^3 \text{ kg/m}^3)(3 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 3 \text{ kg}$$

$$F_b = m_F g = (3 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 30 \text{ N}$$

$F_b > F_g \rightarrow$ la tavola galleggia

Galleggiamento, affondamento e sospensione: la componente verticale della forza totale che agisce su un corpo immerso in un fluido è quindi (ρ_0 è la densità del corpo):

$$F = F_b - F_g = \rho_F V g - \rho_0 V g = (\rho_F - \rho_0) V g$$

NB: attenzione a non confondere la densità del fluido ρ_F con quella del corpo ρ_0 . I volumi sono uguali ma le densità sono diverse.

- Se $\rho_F > \rho_0 \longrightarrow F > 0 \longrightarrow$ *il corpo sale* sino alla sommità del fluido. All'equilibrio il corpo *galleggia* e solo una parte del suo volume V' è immerso.
- Se $\rho_F < \rho_0 \longrightarrow F < 0 \longrightarrow$ *il corpo va a fondo*. Quando il corpo tocca il fondo, si trova in equilibrio e la risultante delle forze sul corpo è nulla.
- Se $\rho_F = \rho_0 \longrightarrow F = 0 \longrightarrow$ *il corpo rimane sospeso nel fluido*. I pesci sono in grado di soddisfare alla condizione $\rho_F = \rho_0$ rimanendo sospesi in acqua a diverse profondità riempiendo o svuotando di una miscela di ossigeno e azoto un sottile sacchetto che si trova sotto la spina dorsale (*vescica natatoria*). In questo modo, il

volume del pesce può essere variato senza una sostanziale variazione della sua massa, permettendo così al pesce di variare densità ($\rho = M/V$) e renderla uguale a quella dell'acqua circostante.

Pressione atmosferica e barometro a mercurio

Noi viviamo sul fondo di un “mare d’aria”, **l’atmosfera, che a livello del mare esercita una pressione** $p_0 \simeq \times 10^5 \text{ Pa}$ (variabile a seconda delle condizioni atmosferiche entro circa il 5%). Gli organismi viventi non sono schiacciati dalla pressione atmosferica perchè i fluidi che li costituiscono si trovano all’incirca alla stessa pressione. Per la legge di Stevino, la pressione in un luogo ad una certa altezza sopra il livello del mare è inferiore a p_0 perchè c’è meno aria sopra.

La misura della pressione atmosferica viene effettuata con il **barometro a mercurio** (Figura 3.3A, Monaco-Sacchi-Solano).

Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: figura 7.16

Monaco-Sacchi-Solano, Elementi di Fisica: figura 3.3A

Legge di Stevino $\rightarrow p_A - p_C = \rho_{mer} g \Delta h$

Δh è il dislivello tra il mercurio nel tubo e quello nel recipiente.

$p_C = 0$ perché nella parte superiore del tubo c’è il vuoto

$p_A = p_B$ perché i punti A e B si trovano alla stesso livello

$p_B = p_0$ perché sulla superficie del fluido grava la pressione atmosferica.

$$p_0 = \rho_{mer} g \Delta h$$

La pressione atmosferica (media) a livello del mare sostiene una colonna di mercurio alta 760 mm ($p_0 = 760 \text{ mmHg}$).

Applicazione: manometri e misura della pressione relativa del sangue

Pressione relativa: $\bar{p} = p - p_0$

La differenza tra due pressioni relative è uguale alla differenza tra le corrispondenti pressioni assolute: $\bar{p}_A - \bar{p}_B = (p_A - p_0) - (p_B - p_0) = p_A - p_B$. Mentre la pressione assoluta è positiva, la pressione relativa può essere positiva o negativa. Se è negativa, significa che la pressione assoluta è minore della pressione atmosferica.

La pressione relativa si misura con un dispositivo detto **manometro a tubo aperto** (Figura 3.3B, Monaco-Sacchi-Solano). La pressione all'estremità aperta è la pressione atmosferica p_0 .

Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: figura 7.12

Monaco-Sacchi-Solano, Elementi di Fisica: figura 3.3B

$$p_A - p_0 = \rho_{mer}g(h_A - h_0) = \rho_{mer}g\Delta h$$
$$p_B = p_A \rightarrow p_B - p_0 = \rho_{mer}g\Delta h$$

Note la densità ρ del fluido ed il dislivello Δh tra le due colonne, il manometro a tubo aperto misura direttamente la pressione relativa $\bar{p}_B = p_B - p_0$.

Esercizio: calcolare la pressione polmonare relativa di un paziente che è in grado di creare un dislivello tra le due colonne di mercurio pari a 25 cm.

$$\Delta h = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m} = 2.5 \times 10^{-1} \text{ m}$$

$$\rho_{mer} = 1.33 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$$

$$\bar{p}_B = \rho_{mer} g \Delta h = (1.33 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(10 \text{ m/s}^2)(2.5 \times 10^{-1} \text{ m})$$

$$\bar{p}_B = 3.3 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Il **sangue** è un fluido che circola nel corpo umano. La **pressione relativa del sangue** viene misurata con un manometro a tubo aperto (Figura 3.4A, Monaco-Sacchi-Solano).

- Pompando aria dentro il bracciale si crea una pressione sufficiente a schiacciare l'arteria brachiale del braccio bloccando il flusso di sangue. L'aria viene quindi fatta uscire mentre con uno stetoscopio si ascolta il ritorno di un impulso nel braccio.
- Quando si avverte il primo rumore, vuole dire che un po' di sangue in condizioni di massima pressione comincia a passare attraverso l'arteria schiacciata. Il dislivello della colonne di mercurio Δh_{max} al primo segnale del passaggio di sangue fornisce una misura della pressione massima (sistolica) del sangue: $\bar{p}_{max} = \rho_{mer}g\Delta h_{max}$.
- Continuando a far uscire aria dal bracciale, la pressione si abbassa ulteriormente. Il rumore cessa quando il sangue a più bassa pressione può passare liberamente nel braccio. Il dislivello di mercurio Δh_{min} nell'istante in cui cessa il rumore è uguale alla pressione minima (diastolica) del sangue: $\bar{p}_{min} = \rho_{mer}g\Delta h_{min}$.

Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: figura 7.13 e 7.14

Monaco-Sacchi-Solano, Elementi di Fisica: figura 3.4A

NB1: le pressioni misurate corrispondono alla pressione del sangue nell'aorta solo se il bracciale è applicato alla stessa altezza del cuore.

NB2: nei manometri in uso per la misura della pressione relativa del sangue nella pratica medica, è visibile una sola colonna (lunga e stretta). L'altra colonna, larga e corta, è contenuta nello strumento. La colonna lunga è tarata dal fabbricante in modo che vi si legga direttamente la pressione relativa.

Nell'uomo la pressione massima (sistolica) del sangue è di circa 120 mmHg, mentre la pressione minima (diastolica) è di circa 80 mmHg. La pressione relativa media di interesse fisiologico è quindi circa $\bar{p} = 100$ mmHg, cui corrisponde una pressione assoluta $p = \bar{p} + p_0 = 100 \text{ mmHg} + 760 \text{ mmHg} = 860 \text{ mmHg}$.

Esercizio: il dislivello della colonne di uno sfigmomanometro a pressione massima è 1.5 volte più grande di quello a pressione minima.

Quest'ultimo è pari a 6 cm. Determinare la pressione sistolica del paziente.

$$\Delta h_{min} = 6 \text{ cm} = 6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Delta h_{max} = 1.5 \cdot \Delta h_{min} = 9 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\rho_{mer} = 1.33 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$$

$$\bar{p}_{max} = \rho_{mer} g \Delta h_{max} = (1.33 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(10 \text{ m/s}^2)(9 \times 10^{-2} \text{ m})$$

$$\bar{p}_{max} = 12 \times 10^3 \text{ Pa} = 1.2 \times 10^4 \text{ Pa}$$

CdL Professioni Sanitarie
A.A. 2012/2013

Dinamica dei fluidi

I principi che regolano il moto dei fluidi sono sempre le leggi fondamentali della meccanica, riespresse in termini di densità e pressione.

Portata

La portata Q è il volume di fluido V che scorre nel condotto in un dato tempo Δt : $Q = V/\Delta t$. Se il fluido si muove con velocità media \bar{v} e indichiamo con A la sezione del condotto, la portata risulta:

$$Q = \frac{Ad}{d/\bar{v}} = A\bar{v}$$

Grandezza derivata: $[Q] = [V/\Delta t] = [V]/[t] \rightarrow$ **Unità di misura:** m^3/s

Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: figura 7.25 Monaco-Sacchi-Solano, Elementi di Fisica: figura 3.6A (la sezione A è indicata con S)

Esercizio: calcolare la portata in un condotto in cui scorre un volume di fluido pari a 40 cm^3 in un tempo di 20 s.

$$V = 40 \text{ cm}^3 = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^3, \Delta t = 20 \text{ s}$$
$$Q = V/\Delta t = (4 \times 10^{-5} \text{ m}^3)/(2 \times 10 \text{ s}) = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

I liquidi sono *incompressibili* (hanno volume proprio). Questo implica che la portata di un liquido in un condotto deve essere costante. Quindi, se la sezione del condotto diminuisce, la velocità del fluido deve aumentare per mantenere Q costante ($v_2 > v_1$).

Equazione di continuità: $Q_1 = Q_2 \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$

Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: figura 7.26
Monaco-Sacchi-Solano, Elementi di Fisica: figura 3.6B

Esercizio: calcolare la portata di un fluido che attraversa un condotto di sezione $A = 1.8 \text{ m}^2$ ad una velocità $\bar{v} = 2 \text{ m/s}$.

$$Q = A\bar{v} = (1.8 \text{ m}^2)(2 \text{ m/s}) = 3.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

Esercizio: se la sezione di un condotto varia da 15 cm^2 a 45 cm^2 , di quanto varia la velocità del liquido? Aumenta o diminuisce?

$$A_1 = 15 \text{ cm}^2, A_2 = 45 \text{ cm}^2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_2/v_1 = A_1/A_2 = (15 \text{ cm}^2)/(45 \text{ cm}^2) = 1/3$$

La velocità diminuisce di 3 volte.

Fluido non viscoso

In tal caso le leggi della Meccanica possono essere riscritte nella forma seguente (**legge di Bernoulli**), analoga come vedremo in seguito al Principio di conservazione dell'energia meccanica per i corpi solidi:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y + p = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 + p_1$$

ρ , p e y sono la densità, la pressione e la posizione occupata da un dato volume di fluido (Figura 3.7A, Monaco-Sacchi-Solano).

NB: la legge di Stevino è un caso particolare che si ottiene dalla legge di Bernoulli se il fluido è fermo ($v = v_1 = 0$).

In corrispondenza di un aneurisma (aumento della sezione) di una grande arteria (Figura 3.7B, Monaco-Sacchi-Solano), in base all'equazione di continuità la velocità del sangue diminuisce ($v_2 < v_1$) e quindi la pressione aumenta. Assumendo che l'arteria sia orizzontale:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2).$$

Ciò può causare un ulteriore aumento di dimensioni dell'aneurisma.

Fluido viscoso

Un fluido viscoso può avere due tipi di moto:

- *laminare*: numero di Reynolds $n_R < 1000 - 2000$
- *turbolento*: $n_R > 1000 - 2000$

Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: figura 7.23

Monaco-Sacchi-Solano, Elementi di Fisica: figura 3.8

A differenza di un fluido in quiete, un fluido viscoso in moto laminare esercita una forza parallela ad una superficie. Se il fluido si muove in un condotto, esso esercita quindi una forza sulle sue pareti. Contemporaneamente le pareti del condotto esercitano una forza uguale e contraria sul fluido (per il III Principio della Meccanica). Azione e reazione vengono dette **forza viscosa** (F_v).

Se il condotto è cilindrico, la forza viscosa ha l'espressione:

$$F_v = 4\pi\eta Lv_m$$

L : lunghezza del condotto

v_m : velocità al centro del condotto (velocità massima)

η : costante di proporzionalità detta **viscosità**

→ **Unità di misura**: $[\eta] = \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 \rightarrow 1 \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = 1 \text{ Poiseuille (PI)}$

→ Unità di misura nel sistema cgs: Poise (P) → 1 PI = 10 Poise (P)

Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: figura 7.24

Monaco-Sacchi-Solano, Elementi di Fisica: figura 3.9B

Moto di un fluido viscoso: legge di Poiseuille

Se il fluido è in moto a velocità costante, per il I principio della Meccanica vi deve essere una forza \vec{F} che compensa la forza viscosa: $\vec{F} + \vec{F}_v = 0 \rightarrow \vec{F} = -\vec{F}_v$. Tale forza può venire esercitata attraverso una pompa che genera una differenza di pressione tra le due estremità del condotto ($A = \pi r^2$ è la sezione del condotto):

$$F = F_1 - F_2 = p_1 A - p_2 A = (p_1 - p_2) \pi r^2$$

Essendo $F = F_v$, si ottiene:

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = 4\pi\eta L v_m \implies p_1 - p_2 = \frac{4\eta L v_m}{r^2}$$

Utilizzando la portata $Q = A\bar{v}$ con $A = \pi r^2$ e $\bar{v} = (0 + v_m)/2 = v_m/2$ (velocità media), si ottiene infine la **legge di Poiseuille** nella forma:

$$Q = \frac{\pi r^4 (p_1 - p_2)}{8\eta L}$$

La quantità di fluido che passa attraverso un condotto è proporzionale alla differenza (caduta) di pressione lungo il condotto e alla quarta potenza del suo raggio, mentre è inversamente proporzionale alla lunghezza del condotto ed alla viscosità del fluido.

Esercizio: in due tubicini uguali, tra le cui estremità è mantenuta la stessa differenza di pressione, scorrono dell'acqua e del sangue. Assumendo che la viscosità dell'acqua sia 4 volte minore di quella del sangue, come varia la portata nel tubicino dell'acqua rispetto a quella nel tubicino del sangue?

$$\eta_{acqua} = \eta_{sangue}/4 \rightarrow \eta_{sangue} = 4\eta_{acqua}$$

$$\text{Legge di Poiseuille: } Q_{acqua}/Q_{sangue} = \eta_{sangue}/\eta_{acqua} = 4$$

Esercizio: un ago ipodermico ha un raggio $r = 10^{-3}$ m ed una lunghezza $L = 10^{-1}$ m. In esso scorre una soluzione liquida caratterizzata da una viscosità $\eta = 10^{-2}$ PI. Se l'ago è sottoposto ad una differenza di pressione $p_1 - p_2 = 800$ Pa, qual è la portata Q in esso?

Per la legge di Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi r^4 (p_1 - p_2)}{8\eta L} = \frac{\pi (10^{-3} \text{ m})^4 (800 \text{ Pa})}{8(10^{-2} \text{ PI})10^{-1} \text{ m}} = \pi \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$$

Applicazione: circolazione del sangue nel corpo umano

Il sangue è un liquido viscoso in moto nel sistema di condotti del corpo umano rappresentato dalle arterie, arteriole, capillari e sistema venoso. La pressione necessaria per controbilanciare la forza viscosa esercitata dalle pareti del sistema circolatorio sul sangue è fornita dal cuore.

Per la legge di Poiseuille:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{R}$$

$R = 8\eta L / \pi r^4$ resistenza del condotto

- Man mano che il sangue procede attraverso il sistema circolatorio, la sua pressione diminuisce.
- Se R aumenta a causa della diminuzione del raggio r di uno dei vasi più importanti, $p_1 - p_2$ aumenta per mantenere una adeguata portata Q (**ipertensione**).
- Per aumentare Q (per esempio durante l'esercizio fisico), $p_1 - p_2$ aumenta e R diminuisce $\rightarrow r$ aumenta (*vasodilatazione*)

- assumendo che il sangue sia in moto in un condotto cilindrico di raggio r , il numero di Reynolds è:

$$n_R = 2\rho_{sangue}r\bar{v}/\eta_{sangue}$$

Sostituendo alla velocità la portata $Q = A\bar{v}$ con $A = \pi r^2$:

$$n_R = 2\rho_{sangue}Q/(\pi r\eta_{sangue})$$

Se la portata aumenta molto (ad esempio durante un esercizio fisico intenso) oppure un vaso si ostruisce, n_R può superare il valore critico (~ 2000) ed il moto del sangue diventare turbolento.

Esercizio (dall'esempio 3, pag. 158, Cromer): in un paziente la differenza media di pressione tra l'aorta ed i capillari è 135.3 mmHg. Sapendo che la sua portata sanguigna media è $Q = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$, qual'è la resistenza totale del suo sistema circolatorio? (Si ricordi che $1 \text{ mm Hg} = 133 \text{ Pa}$)

$$p_1 - p_2 = 135.3 \text{ mmHg} = 1.8 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$Q = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R = (p_1 - p_2)/Q = (1.8 \times 10^4 \text{ Pa}) / (4 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}) = 0.45 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^3 = 4.5 \times 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^3$$

Moto in un fluido viscoso: sedimentazione

[Questo argomento non fa parte del programma per i Corsi di Laurea in Fisioterapia e Tecniche di Radiologia]

Un corpo in moto in un fluido viscoso (fermo) subisce l'azione di una forza che ha la stessa natura di quella precedentemente considerata per il moto di un fluido viscoso in un condotto cilindrico. Si dimostra che, se per semplicità assumiamo che il corpo abbia forma sferica di raggio r_0 e velocità v , la forza ha intensità:

$$F_v = 6\pi\eta r_0 v$$

La forza viscosa, come l'attrito, si oppone al moto. Quindi sul corpo, nella direzione verticale, agiscono tre forze:

gravità: $F_g = mg = \rho V g$

spinta di Archimede: $F_b = m_F g = \rho_F V g$

forza viscosa: $F_v = 6\pi\eta r_0 v$

Inizialmente il moto è uniformemente accelerato. Quando la velocità raggiunge un certo valore limite (**velocità di sedimentazione**), la

somma delle forze si annulla ed il moto diventa uniforme. Ciò si verifica quando:

$$F_v + F_b - F_g = 0$$
$$v_s = \frac{2r_0^2 g (\rho - \rho_F)}{9\eta}$$

Questo fenomeno viene utilizzato per determinare le proprietà dei globuli rossi nel sangue.

Esercizio: calcolare la *velocità di eritrosedimentazione (VES)* dei globuli rossi nel plasma assumendo che un globulo rosso abbia $r_0 = 3.5 \mu m$ e $\rho = 1.2 \times 10^3 kg/m^3$. La densità e viscosità del plasma sono $\rho_p = 1.03 \times 10^3 kg/m^3$ e $\eta = 1.5 \times 10^{-3} PI$.

$$v_s = 2.67 \times 10^{-6} m/s = 9.6 mm/ora$$

Tensione superficiale e capillarità

[Questo argomento non fa parte del programma per i Corsi di Laurea in Fisioterapia e Tecniche di Radiologia]

<http://www.mikeblaber.org/oldwine/chm1045/notes/Forces/Liquids/Forces03.htm>

<http://en.wikipedia.org/wiki/File:WassermoleküleInTröpfchen-2.svg>

Vedi anche: Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: figure 9.1 e 9.2

All'interno di un fluido, le forze che agiscono su di una molecola, dovute all'azione di tutte le altre molecole (*forze di coesione*), sono rivolte in tutte le direzioni e mediamente si annullano. In superficie, le forze agiscono invece solo in alcune direzioni e tendono quindi ad attrarre le molecole verso l'interno. La risultante di tali forze è compensata dalla pressione interna del fluido.

Se si tenta di spingere alcune molecole della superficie verso l'interno, la pressione interna tende ad opporsi e spingere la molecola verso l'esterno. Viceversa, se si tenta di allontanare una molecola dalla superficie (con una forza non troppo intensa), le forze molecolari tendono a riportarla nella posizione di partenza. Dal punto di vista macroscopico,

la superficie si comporta quindi come una sottile membrana elastica caratterizzata da una certa **tensione superficiale**, in grado di generare, se *incurvata*, forze perpendicolari alla superficie stessa. Infatti, se si appoggia un peso su di essa, la forza dovuta alla tensione superficiale è in grado di controbilanciare il peso.

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Surface_Tension_Diagram.svg

<http://en.wikipedia.org/wiki/File:WaterstriderEnWiki.jpg>

Vedi anche: Cromer, Fisica per Medicina, Farmacia e Biologia: figure 9.5 e 9.6

Se F è la forza molecolare superficiale e b la lunghezza di una linea sulla superficie che delimita la zona incurvata, la tensione superficiale γ è definita da:

$$\gamma = F/b$$

È una grandezza derivata. Le sue dimensioni fisiche sono: $[\gamma] = [F/b] = [F]/[b] = N/m$.

In una goccia di liquido di raggio R la tensione superficiale compensa esattamente la forza generata dalla differenza tra la pressione interna p_i ed esterna p_e . Si può dimostrare che:

$$p_i - p_e = 2\gamma/R \quad \text{legge di Young - Laplace}$$

Le mucose degli alveoli polmonari hanno una tensione superficiale $\gamma = 0.05 \text{ N/m}$ ed un raggio $R = 5 \times 10^{-5} \text{ m}$. Quindi la differenza di pressione necessaria per espandere un alveolo sarebbe di:

$$p_i - p_e = 2\gamma/R$$
$$p_i - p_e = 2(5 \times 10^{-2} \text{ N/m}) / (5 \times 10^{-5} \text{ m}) = 2 \times 10^3 \text{ N/m}^2 = 15 \text{ mmHg}$$

La tensione superficiale può venire ridotta mescolando al fluido delle sostanze (*tensioattivi*) che ne diminuiscono le forze molecolari superficiali. *Le pareti degli alveoli secernono un tensioattivo che riduce γ di circa 15 volte, per cui la differenza di pressione necessaria per espanderli è di solo 1 mm Hg.* Questa è infatti la differenza di pressione tra i polmoni e la cavità pleurica.

Se la superficie del fluido è a contatto con un'altro materiale, si instaurano anche forze molecolari superficiali tra la molecole dei due materiali a contatto, dette **forze di adesione**.

Se la tensione è molto grande rispetto alla forza di adesione (per unità di lunghezza), il fluido tende a rimanere coeso (la superficie non si bagna). Vicino ai punti di contatto la tensione superficiale (dovuta alle forze di coesione) è sufficientemente forte da compensare la somma della forza di adesione e della forza di pressione. Viceversa, se la forza di adesione (per unità di lunghezza) è più grande della tensione, il fluido aderisce alla superficie (che si bagna). L'angolo formato tra le due superfici (del liquido e del solido) dipende da queste forze e quindi dai due materiali a contatto.

Lungo il bordo della superficie di contatto entrano in gioco la forza di adesione e tutte le tensioni tra le diverse superfici di contatto, che mantengono l'equilibrio tra le diverse forze. In recipienti di forma molto stretta (capillari) ciò dà luogo al fenomeno della **capillarità**. La tensione superficiale liquido-aria è sufficientemente intensa che la componente verticale può modificare il livello del liquido rispetto a quello all'esterno del capillare.

<http://en.wikipedia.org/wiki/File:SurfTensionContactAngle.png>

<http://www.galenotech.org/chimfis7.htm>

Monaco-Sacchi-Solano, Elementi di Fisica: figura 3.12

$$\begin{aligned}p_i - p_e &= \pm 2\gamma/R && \text{legge di Young - Laplace} \\p_i - p_e &= -2\gamma \cos \theta / r && (r = \mp R \cos \theta) \\ \rho g y &= 2\gamma \cos \theta / r && (\text{per la legge di Stevino}) \\ y &= 2\gamma \cos \theta / (\rho g r)\end{aligned}$$

Esercizio: un capillare di vetro con un raggio $r = 0.1$ cm viene immerso in plasma sanguigno ($\rho_p = 1.03 \times 10^3$ kg/m³, $\gamma = 0.073$ N/m a 37⁰ C). L'angolo che la superficie del sangue forma con il capillare è $\theta = 30^0$. Calcolare di quanto si alza o abbassa il livello del plasma nel capillare.

Essendo $\theta < 90^0$, il livello si alza.

$$r = 0.1 \text{ cm} = 10^{-3} \text{ m}$$

$$y = 2\gamma \cos \theta / (\rho g r)$$

$$y = 2(7.3 \times 10^{-2} \text{ N/m})(\cos 30^0) / (1.03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) / (10 \text{ m/s}^2) / (10^{-3} \text{ m}) = 1.23 \times 10^{-2} \text{ m}$$

CdL Professioni Sanitarie
A.A. 2012/2013

Esercizi riassuntivi

(1) Calcolare la massa di gas contenuta in una bombola avente un volume di 600 cm^3 . La densità del gas è $4 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^3$.

$$V = 600 \text{ cm}^3 = 6 \times 10^2 (10^{-2} \text{ m})^3 = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$\rho = 4 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^3$$

$$M = \rho V = (4 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^3)(6 \times 10^{-4} \text{ m}^3) = 2.4 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

(2) Un'esplosione provoca un aumento della pressione dell'aria circostante (sovrappressione). Calcolare la forza esercitata sulla facciata di una casa alta 10 m e larga 7 m da una sovrappressione di $3 \times 10^7 \text{ Pa}$.

$$p = 3 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$S = 10 \times 7 \text{ m}^2 = 70 \text{ m}^2$$

$$p = F/S \rightarrow F = p \cdot S$$

$$F = (3 \times 10^7 \text{ Pa})(70 \text{ m}^2) = 2.1 \times 10^9 \text{ N}$$

(3) Un'imbarcazione con una massa di 390 tonnellate galleggia in un porto. Qual è la spinta di Archimede su di essa? Qual è il volume di acqua (densità 10^3 kg/m^3) spostato dallo scafo?

$$m = 390 \text{ ton} = 3.9 \times 10^5 \text{ kg}$$

$$F_g = mg = (3.9 \times 10^5 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 3.9 \times 10^6 \text{ N}$$

$$F_b = F_g = 3.9 \times 10^6 \text{ N}$$

$$F_b = m_F g = \rho_F V g \rightarrow V = F_b / \rho_F / g$$

$$V = (3.9 \times 10^6 \text{ N}) / (10^3 \text{ kg/m}^3) / (10 \text{ m/s}^2) = 3.9 \times 10^2 \text{ m}^3$$

(4) In una persona in posizione eretta i piedi si trovano ad essere circa 1.35 m sotto il livello del cuore. Qual è la differenza di pressione tra il sangue nell'arteria del piede (livello A) e quello a livello del cuore (livello B)? La densità del sangue è $\rho_s = 1.06 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ (esempio 4, pag. 144, Cromer).

$$p_A - p_B = \rho_s g \Delta h = (1.06 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3)(10 \text{ m/s}^2)(1.35 \text{ m}) = 1.4 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

(5) La portata nell'aorta di un paziente è pari a $90 \text{ cm}^3/\text{s}$. Se la velocità media del sangue che scorre è 60 cm/s , calcolare la sezione dell'aorta (in cm^2).

$$Q = 90 \text{ cm}^3/\text{s} = 90(10^{-2} \text{ m})^3/\text{s} = 9 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\bar{v} = 60 \text{ cm}/\text{s} = 6 \times 10^{-1} \text{ m}/\text{s}$$

$$Q = A\bar{v} \rightarrow A = Q/\bar{v}$$

$$A = (9 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s})/(6 \times 10^{-1} \text{ m}/\text{s}) = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 1.5 \text{ cm}^2$$

(6) Il raggio di un'arteriola è $r_1 = 0.2 \text{ cm}$. A causa di una ostruzione, il raggio si riduce a $r_2 = 0.1 \text{ cm}$. Se la differenza di pressione alle estremità dell'arteriola, la sua lunghezza e la viscosità del sangue rimangono le stesse, di quanto varia la portata?

$$r_2/r_1 = 1/2$$

$$Q_2/Q_1 = (r_2/r_1)^4 = (1/2)^4 = 1/16$$

La portata si riduce di 16 volte.

(7) Due capillari di vetro di raggio $r_1 = 1 \text{ mm}$ e $r_2 = 3 \text{ mm}$ vengono immersi in mercurio ($\theta = 180^\circ$, $\gamma = 0.4355 \text{ N}/\text{m}$, $\rho_m = 1.36 \times 10^4 \text{ kg}/\text{m}^3$). In quale dei due il livello del mercurio è maggiore? Di quanto?

[Esercizio relativo ad un argomento che non fa parte del programma per i Corsi di Laurea in Fisioterapia e Tecniche di Radiologia]

Essendo $\theta > 90^\circ$, il livello di mercurio nel capillare si abbassa.

$$r_1 = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}, r_2 = 3 \text{ mm} = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$y = 2\gamma \cos \theta / (\rho g r)$$

$$y_1 = -2(4.355 \times 10^{-1} \text{ N/m})(\cos 180^\circ) / (1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3) / (10 \text{ m/s}^2) / (10^{-3} \text{ m}) = -6.4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$y_2 = -2(4.355 \times 10^{-1} \text{ N/m})(\cos 180^\circ) / (1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3) / (10 \text{ m/s}^2) / (3 \times 10^{-3} \text{ m}) = -2.1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Il livello è maggiore nel secondo capillare.

$$y_2 - y_1 = (-2.1 \times 10^{-3} + 6.4 \times 10^{-3}) \text{ m} = 4.3 \times 10^{-3} \text{ m} = 4.3 \text{ mm}$$