Tacitae per amica silentia Lunae
Virgilio, Aen. II, 255

Introduzione

Gli ammassi globulari sono sistemi autogravitanti costituiti da $10^4 - 10^6$ stelle, poveri di gas, caratterizzati da elevate densità centrali (tipicamente $10^5 - 10^6$ stelle $\cdot$ pc^{-3}) e con età caratteristiche dell'ordine di 10^{10} anni.

A causa delle elevate densità centrali, negli ammassi globulari hanno luogo interazioni gravitazionali tra coppie di stelle singole, tra binarie e singole stelle e tra binarie ed altre binarie. Tali interazioni da una parte favoriscono la formazione di nuovi sistemi binari e oggetti stellari "esotici" compatti (quali variabili cataclismiche, binarie X di piccola massa e pulsar a millisecondo), dall'altra forniscono ad alcune delle stelle (o binarie) coinvolte energia cinetica traslazionale sufficiente per essere espulse dall'ammasso o portate nelle sue regioni periferiche.

In particolare gli oggetti compatti nati dall'evoluzione delle stelle più massive, stelle di neutroni e buchi neri, segregando per frizione dinamica nelle regioni centrali dell'ammasso, dove le densità sono più alte, risentono degli incontri gravitazionali in modo più accentuato rispetto alle stelle di massa inferiore.

Le stelle di neutroni che non vengono espulse dall'ammasso in seguito al kick natale spesso acquistano stelle compagne per cattura mareale o incontri a 3 corpi. Accrescendo materia e momento angolare dalla compagna così acquisita (attraverso una fase di binaria X), vengono accelerate e si accendono come pulsar a millisecondo. Proprio per questo si ritiene che gli incontri gravitazionali siano la causa dell'elevato numero di binarie X e di pulsar a millisecondo osservate negli ammassi globulari rispetto alla media galattica.

La maggior parte dei buchi neri, invece, è stata espulsa dagli ammassi globulari proprio in seguito a incontri gravitazionali con altri buchi neri (Sigurdsson & Hernquist 1993). Studi recenti indicano, tuttavia, che almeno una binaria di buchi neri o un singolo buco nero particolarmente massivo potrebbero avere evitato l'espulsione, rimanendo nell'ammasso ed accrescendo in massa principalmente per cattura mareale di stelle. Questo processo avrebbe portato alla formazione, al centro di alcuni ammassi globulari, di una binaria di buchi neri moderatamente massiva ($\sim 50 - 200\, m_\odot$), o di un singolo buco nero di $\sim 1000\, m_\odot$, circondato da un *cusp* di stelle ad esso gravitazionalmente legate. Recentemente questa interpretazione teorica sembra aver trovato alcuni riscontri osservativi: Gebhardt et al. (2002) hanno segnalato la presenza di un candidato buco nero di $\sim 2 \cdot 10^4 m_\odot$ nell'ammasso G 1 in Andromeda; mentre Gerssen et al. (2002) hanno suggerito l'esistenza di un buco nero di $\sim 1.7 \cdot 10^3 m_\odot$ in M 15.

Anche l'ammasso globulare NGC 6752 si può annoverare tra i candidati ad ospitare un buco nero di questo genere. Infatti la dinamica delle 5 pulsar a millisecondo scoperte in NGC 6752 (D'Amico et al. 2002, Ferraro et al. 2003) suggerisce un rapporto M/L centrale $\gtrsim 6-7$, compatibile con la presenza di un singolo buco nero di $\sim 500\, m_{\odot}$ oppure di una binaria di buchi neri moderatamente massiva.

L'unica pulsar a millisecondo binaria di NGC 6752, la PSR J1911$-$5958A, si trova in una posizione insolitamente periferica, se si considera che le stelle di neutroni sono tra gli oggetti più massivi di un ammasso globulare e tendono a segregare al centro per frizione dinamica. L'attuale collocazione della PSR-A, come hanno dimostrato Colpi, Possenti & Gualandris (2002), non si può spiegare facendo ricorso ad una interazione gravitazionale con le stelle dell'ammasso; invece, la presenza di un buco nero, singolo o binario, nel core di NGC 6752 potrebbe fornire la soluzione del problema.

L'obiettivo di questa Tesi è mostrare che proprio l'interazione gravitazionale con una binaria di buchi neri oppure con un singolo buco nero e una stella del suo cusp può aver fornito alla PSR-A una velocità di rinculo tale da portarla nella sua attuale collocazione, senza eiettarla dall'ammasso.

L'adempimento di questa ricerca ha richiesto la scrittura di un codice che calcola le *interazioni tra 4 corpi* soggetti a forza gravitazionale, utilizzando un integratore Runge-Kutta al IV ordine con ampiezza del passo variabile. Il codice mantiene l'errore frazionario sulla conservazione dell'energia totale ($\Delta E/E$) inferiore a una parte su 10^9 per tutta la durata dell'interazione, consentendoci di valutare con estrema precisione gli scambi energetici che avvengono durante lo scattering (che sono almeno 6 ordini di grandezza maggiori dell'errore). Un secondo codice, che sfrutta il metodo Monte Carlo, è stato elaborato per generare secondo opportune funzioni di distribuzione i valori dei 7 parametri iniziali del sistema di corpi interagenti.

La simulazione di oltre 9000 eventi di scattering coinvolgenti binarie di buchi neri moderatamente massive ((30, 3) $m_{\odot}$, (50, 10) $m_{\odot}$, (200, 10) $m_{\odot}$) e una pulsar binaria avente i parametri orbitali della PSR-A+co ha evidenziato come la velocità di rinculo acquisita in media da quest'ultima sia consistente con il valore ($\sim 35\,\mathrm{km\,s^{-1}}$) necessario per giustificare la sua attuale posizione. Inoltre l'interazione con una binaria di buchi neri nel range di masse scelto lascia pressoché invariati i parametri orbitali della pulsar binaria.

Anche nel corso di $\sim$ 2000 scattering tra un singolo buco nero di $500\, m_{\odot}$, una stella del cusp ($1\, m_{\odot}$) e una pulsar binaria con i parametri orbitali della PSR-A+co le velocità di rinculo acquisite da quest'ultima sono compatibili con il valore richiesto; ma, a causa della focalizzazione gravitazionale del buco nero, il numero di ionizzazioni è piuttosto alto ($\sim 30\%$) e i parametri orbitali della PSR-A+co vengono notevolmente alterati. In particolare l'eccentricità aumenta di oltre 4 ordini di grandezza. Poiché l'eccentricità attuale della PSR-A+co è molto piccola ($\lesssim 10^{-5}$) e i tempi di circolarizzazione, per una binaria formata da due stelle compatte, sono proibitivamente lunghi, questa circostanza ci porta ad escludere che l'espulsione della pulsar sia dovuta ad un singolo buco nero di 500 $m_\odot$, a meno che lo scattering sia avvenuto prima della fase di trasferimento di massa.

Tuttavia l'ipotesi che la PSR-A+co sia stata espulsa prima della fase di trasferimento di massa difficilmente si concilia con le tracce evolutive della popolazione stellare di NGC 6752. Inoltre la simulazione di $\sim$ 2000 scattering tra un buco nero di 500 $m_\odot$, una stella del cusp e una binaria i cui parametri orbitali sono stati scelti in base a quella che doveva essere la PSR-A+co prima del trasferimento di massa ha evidenziato un'incidenza ancora più alta delle ionizzazioni (40-90%).

In alternativa all'ipotesi di una binaria di buchi neri, anche una binaria "leggera" costituita da un buco nero di $50\,m_\odot$ e una stella di neutroni sembrerebbe (in base alla simulazione di 1000 eventi) capace di impartire alla PSR-A+co la velocità di rinculo richiesta, senza alterarne i parametri orbitali.

Nel *Capitolo 1* accenneremo brevemente alle caratteristiche peculiari degli Ammassi Globulari (profili di densità, popolazione stellare...).

Nel *Capitolo 2* descriveremo gli aspetti principali degli incontri a 3 corpi tra binarie e singole stelle e a 4 corpi tra binarie ed altre binarie.

Nel *Capitolo 3* affronteremo la questione, tutt'ora molto aperta, della formazione dei buchi neri negli ammassi globulari.

Nel *Capitolo 4* forniremo un quadro delle conoscenze attuali su NGC 6752 e sulle sue pulsar a millisecondo, con un particolare riferimento alla PSR-A.

Nel *Capitolo 5* verranno illustrati il codice che integra i 3 e i 4 corpi e il codice che genera le condizioni iniziali con il metodo Monte Carlo.

Nel *Capitolo 6* discuteremo i risultati delle simulazioni.

Capitolo 1

AMMASSI GLOBULARI

In questo Capitolo si descrivono le proprietà strutturali degli Ammassi Globulari (distribuzione di velocità, profilo di densità...) in condizioni di equilibrio gravitazionale stazionario. Successivamente si considerano gli effetti perturbativi indotti dalla granularità della materia, ossia l'evoluzione stellare, la distribuzione di massa, la presenza di binarie e soprattutto gli incontri tra stelle. Infine si esamina la ricca popolazione di oggetti stellari esotici presente negli ammassi globulari, indotta dall'evoluzione stellare e dalle interazioni gravitazionali.

1.1 Cenni sulla struttura e sull'evoluzione degli Ammassi Globulari

La dinamica di un Ammasso Globulare si può descrivere partendo da un modello idealizzato in cui si trascurano gli incontri tra stelle e in cui si assumono condizioni di equilibrio gravitazionale stazionario. Questo determina soluzioni per le equazioni della dinamica che possiamo considerare all'ordine zero.
In quest'ottica, gli effetti dovuti agli incontri tra stelle e agli altri processi trascurati nel costruire il modello idealizzato possono essere considerati termini PERTURBATIVI, che, introdotti nelle equazioni del moto, determinano l'evoluzione dinamica secolare dell'ammasso (Spitzer 1987 [92]).

All'ordine zero un Ammasso Globulare può essere descritto come un sistema in cui:

A La granularità della materia autogravitante è trascurabile e il potenziale gravitazionale può essere considerato una funzione che varia lentamente con la posizione.

Fatta questa assunzione, è naturale definire una funzione distribuzione delle velocità $f(\vec{r}, \vec{v})$, dipendente dal vettore posizione $\vec{r}$ e dal vettore velocità $\vec{v}$.

B Il potenziale gravitazionale ϕ e la funzione distribuzione delle velocità f sono indipendenti dal tempo.

C Il sistema è a simmetria sferica, nel senso che ϕ è funzione solo di r e che f è una funzione solo di r, v_r e v_t (dove v_r è la componente radiale della velocità e v_t la componente ortogonale al raggio vettore $\vec{r}$).

Sotto queste condizioni, uno dei modelli che descrivono la struttura di un ammasso globulare in buon accordo con le osservazioni è costituito dal modello della *sfera isoterma*. Secondo questo modello la funzione distribuzione di velocità all'ordine zero ha una forma del tipo:

$$f^{(0)} = K\, e^{-E/\sigma^2} \tag{1.1}$$

dove K è una costante, E è l'energia specifica e σ è la dispersione di velocità lungo la linea di vista. Lo svantaggio di questo modello è che, poiché la funzione distribuzione (1.1) non è troncata alle alte energie, richiede stelle con tutti i valori di E e quindi massa infinita.

Adattando la (1.1) in modo da evitare la richiesta di una massa infinita, si ottiene il modello della *maxwelliana abbassata* o *modello di King*, descritto dalla seguente funzione distribuzione:

$$f = \begin{cases} K\,(e^{-E/\sigma^2} - e^{-E_e/\sigma^2}) & \text{se}\, E < E_e \\ 0 & \text{se}\, E > E_e \end{cases} \tag{1.2}$$

dove E_e è l'energia di fuga dall'ammasso.

Alla funzione di distribuzione maxwelliana abbassata corrisponde un profilo di densità superficiale di stelle (*profilo di King*), spesso utilizzato per fittare i dati fotometrici, un esempio del quale è rappresentato in Figura 1.1.

Un'espressione di f analoga alla maxwelliana abbassata, ma capace di tener conto anche di eventuali anisotropie nella velocità è rappresentata dalla funzione ditribuzione di *Michie* (1963):

$$f = \begin{cases} K\; e^{-\gamma J^2}(e^{-E/\sigma^2} - e^{-E_e/\sigma^2}) & \text{se}\, E < E_e\, \text{e}\, J < J_c(E) \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{1.3}$$

dove J è il momento angolare specifico, J_c è il valore di J per una stella su un'orbita circolare con energia E, e γ è una costante.

Per tener conto della *granularità della materia*, è necessario modificare questo modello, in modo da includere anche

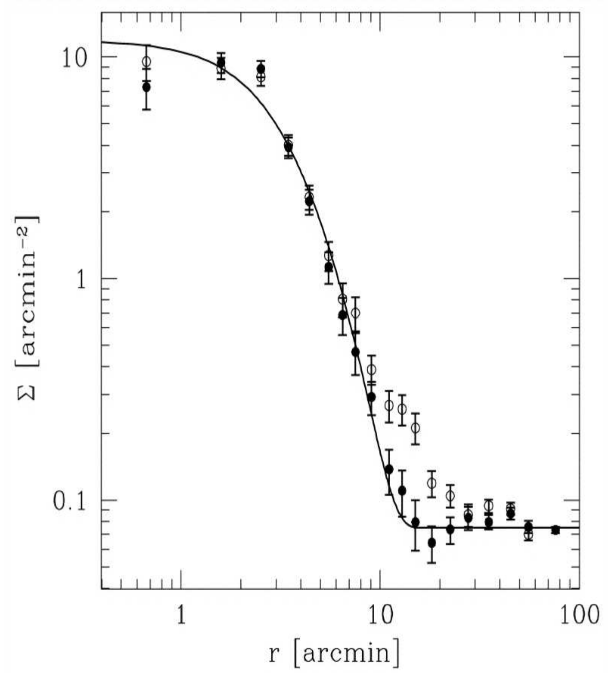


Figura 1.1: Profilo radiale della densità superficiale di stelle dell'ammasso globulare Palomar 5 ricavato dai dati della Sloan Digital Sky Survey. I cerchi pieni mostrano la densità superficiale nei settori est e ovest, i cerchi vuoti nei settori nord e sud. La linea continua rappresenta il best-fit con un modello di King dei dati individuati dai cerchi pieni (Odenkirchen et al. 2002 ApJ, 124, 1497).

1. la presenza di stelle di massa diversa, che si distribuiscono secondo una certa *funzione di massa*. Infatti tanto il modello della sfera isoterma quanto il modello di King e quello di Michie-King sono modelli monomassa;

2. l'*evoluzione* della popolazione *stellare* nell'ammasso (che determina il tasso di formazione degli oggetti compatti, quali nane bianche, stelle di neutroni e buchi neri);

3. la presenza di *binarie primordiali*;

4. gli *incontri tra stelle* (stelle singole, stelle singole+binarie, binarie+binarie).

In particolare, gli incontri tra stelle, stretti e distanti, possono avere molteplici conseguenze sull'evoluzione dell'ammasso.

Gli *incontri stretti*, pur essendo i meno probabili, producono effetti particolarmente interessanti, quali:

- la *formazione* e la *distruzione di binarie* (cfr. Cap.2, Sez.1.2);
- variazioni notevoli della velocità degli oggetti coinvolti, che possono comportare l'*espulsione di stelle dall'ammasso* (cfr. Cap.3, Cap.6);
- la formazione di *oggetti stellari esotici* (cfr. Cap.1, Sez.2; Cap.2, Sez.4).

Gli *incontri distanti* producono ciascuno un'alterazione trascurabile della velocità iniziale delle stelle coinvolte; ma, essendo i più probabili, il loro effetto cumulativo gioca un ruolo importante nell'evoluzione secolare del sistema, tanto che gli ammassi globulari possono essere considerati *sistemi collisionali.*

Un sistema si definisce collisionale quando il suo tempo di rilassamento è breve rispetto al suo tempo di vita media.

Il *tempo di rilassamento* è definito come il tempo scala su cui avvengono i processi di rilassamento, ossia quei processi -come gli incontri gravitazionali tra stelle- che tendono a portare il sistema al raggiungimento dell'equilibrio termico.

Per una popolazione di stelle con distribuzione maxwelliana delle velocità, massa di una singola stella pari a m, velocità di dispersione lungo la linea di vista σ e densità ρ, il tempo di rilassamento è definito come (Binney & Tremaine [8], p.514):

$$t_{relax} = 0.34 \frac{\sigma^3}{G^2 m \rho \ln \Lambda} \tag{1.4}$$

dove $\ln \Lambda \approx 10$ è il logaritmo coulombiano.

Il tempo di rilassamento usualmente varia di parecchi ordini di grandezza in regioni diverse di un singolo sistema. Può essere utile, allora, definire un tempo di rilassamento "standard", riferito ad un certo raggio fissato.

Generalmente si prende come riferimento il raggio a metà massa (r_h), ossia il raggio entro cui è contenuta metà della massa dell'ammasso globulare. Poiché, per la definizione di r_h, $\rho = 3M/(8\pi r_h^3)$, dove M è la massa totale dell'ammasso, e poiché, per il teorema del Viriale, $\sigma \simeq \sqrt{0.4G\,M/(3\,r_h)}$, il tempo di rilassamento riferito al raggio di metà massa (detto anche *tempo di rilassamento mediano*) si scrive come:

$$t_{r_h} = \frac{0.14}{\ln(0.4\,N)} \sqrt{\frac{r_h^3}{G\,M}} = \frac{6.5 \cdot 10^8\,\mathrm{yr}}{\ln(0.4\,N)} \left(\frac{M}{10^5\,m_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{m_\odot}{m}\right) \left(\frac{r_h}{1\mathrm{pc}}\right)^{3/2} \tag{1.5}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\Lambda(r_h) \equiv 0.4\,N$ (N è il numero di stelle nell'ammasso).

Un'altra scelta possibile consiste nel prendere come riferimento il raggio del core r_c, ossia il raggio a cui la brillanza superficiale scende a metà del suo valore centrale, definito da:

$$r_c = \left(\frac{9\sigma^2}{4\pi G \rho_c} \right)^{1/2} \tag{1.6}$$

dove ρ_c = densità di massa centrale, σ = velocità di dispersione stellare. Il tempo di rilassamento al raggio del core o *tempo di rilassamento centrale* si scrive, quindi, come:

$$t_{r_c} = 5.7 \cdot 10^6 \mathrm{yr} \left(\frac{\sigma}{7\,\mathrm{km\,s^{-1}}} \right)^3 \left(\frac{0.5 m_\odot}{m} \right)^2 \left(\frac{2 \cdot 10^5\,\mathrm{pc^{-3}}}{n_c} \right) \tag{1.7}$$

dove n_c è la densità di stelle nel core.

Il tempo di rilassamento mediano ha il vantaggio di cambiare relativamente poco durante l'evoluzione di un ammasso, contrariamente al tempo di rilassamento centrale.

Siccome gli ammassi globulari hanno tempi di vita media $\gtrsim 10^{10}\,\mathrm{yr}$, il tempo di rilassamento, sia mediano che centrale, è di 2-4 ordini di grandezza più breve del tempo di vita media. Questo ci dice che gli ammassi globulari sono *sistemi collisionali.*

Inoltre, poiché il tempo di rilassamento è così breve, gli ammassi globulari, contrariamente alle galassie, sono *sistemi rilassati.*
Proprio per questo motivo, in essi si osserva quel fenomeno noto come *segregazione di massa*, ossia la tendenza degli oggetti più massivi a "scivolare" verso il centro della buca di potenziale. In virtù della segregazione di massa, il core di un ammasso globulare raggiunge densità molto elevate ($10^5 - 10^6\,\mathrm{stelle\,pc^{-3}}$), che contribuiscono ad accrescere la probabilità di incontri stretti.

1.2 "Oggetti stellari esotici" negli ammassi globulari

Gli incontri stretti, operando congiuntamente all'evoluzione stellare, possono contribuire alla produzione di *oggetti stellari esotici.* Questo spiega perché gli ammassi globulari ospitano un gran numero di oggetti stellari insoliti (cfr. Cap.2, Sez.4).

Nel corso di questa Tesi ci occuperemo in particolare di due fra questi oggetti: le *pulsar a millisecondo* e i *buchi neri.*

Rimandiamo la trattazione sui buchi neri (d'ora in poi, più brevemente, BH) al capitolo 3.
In questa sezione accenneremo brevemente ai principali oggetti esotici, con particolare riferimento alle pulsar a millisecondo.

Blue Stragglers: (d'ora in poi BSs) si tratta di stelle che occupano la parte alta della sequenza principale al di sopra dell'attuale massa di turn-off. Ne sono state osservate in molti ammassi globulari, tra cui: ω Centauri, 47 Tucanae (Fig.1.2), NGC 6397, M 30 e M 80 (M. B. Davies 2002 [21]). Probabilmente esse derivano dal *merging* tra due stelle di sequenza principale (cfr. Cap.2, Sez.4).

Figura 1.2: Regione centrale dell'ammasso globulare 47 Tucanae, in cui sono state individuate numerose BSs (evidenziate con cerchi gialli). Immagine RGB ricavata dai dati della WFPC2 a bordo dell'HST (29/10/1997).

Variabili cataclismiche: (*Cataclysmic Variables*, d'ora in poi CVs) si tratta di binarie costituite da una stella di piccola massa con una nana bianca. La stella di piccola massa si trova nella fase in cui, riempito il lobo di Roche, trasferisce materia alla nana bianca attraverso un disco di accrescimento (Fig1.3). Contrariamente alle BSs, le CVs attualmente rivelate sono in numero esiguo (Grindlay 1999 [40]).

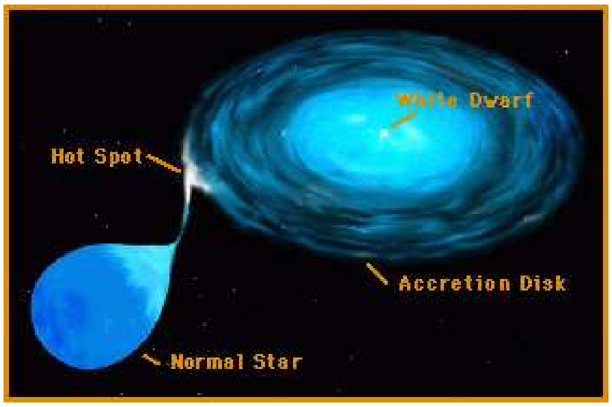


Figura 1.3: Rappresentazione di una variabile cataclismica.

Binarie X di Piccola Massa: (*Low Mass X-Ray Binaries*, d'ora in poi LMXBs) sono considerate le progenitrici delle pulsar a millisecondo. Sono costituite (Fig1.4) da una stella di neutroni (NS) con una compagna di sequenza principale meno massiva del sole e sono caratterizzate (Verbunt 1993 [94]) da:

- spettro X abbastanza soft($KT \lesssim 5$ keV);
- campo magnetico superficiale basso ($B \lesssim 10^9$ gauss);
- luminosità ottica molto minore della luminosità X;
- spettro ottico dominato dal disco di accrescimento;

Le LMXBs vengono classificate, in base al loro periodo orbitale, in:

sistemi divergenti: sistemi con periodo orbitale iniziale $P_{orb} \gtrsim$ 1-2 giorni, i quali aumentano la loro separazione orbitale durante la fase di accrescimento;

sistemi convergenti: sistemi con periodo orbitale iniziale $P_{orb} \lesssim$ 1-2 giorni, che riducono la separazione orbitale durante il trasferimento di massa.

Il valore del periodo che distingue i due regimi, $P_{orb} \sim$ 1-2 giorni, è detto **periodo di biforcazione** (Pylyser & Savonije 1989 [79]).

Negli ammassi globulari sono state individuate 13 LMXBs, un numero notevole, se si considera che se ne conoscono circa un centinaio in tutta la Galassia.

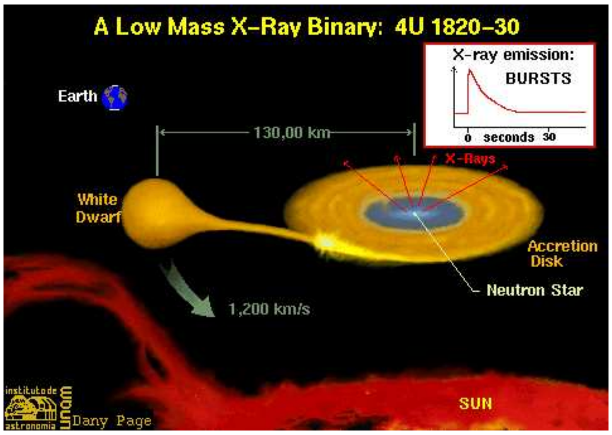


Figura 1.4: Rappresentazione di una Binaria X di Piccola Massa.

Pulsar a millisecondo: (*Millisecond Pulsars*, d'ora in poi MSPs)
Una pulsar è una stella di neutroni rapidamente ruotante ($P_{spin} \lesssim 8$ s) e dotata di un intenso campo magnetico ($B \sim 10^{12} - 10^{13}$ G). Il campo magnetico e la velocità di rotazione inducono campi elettrici tali da strappare elettroni dalla superficie stellare. Questi elettroni, convogliati lungo le linee di forza del campo magnetico, emettono fotoni di curvatura. Un processo di degradazione a catena di tali fotoni (per produzione-annichilazione di coppie $e+/e-$) porta all'emissione di radiazione pressoché in tutte le bande dello spettro elettromagnetico. L'emissione in banda radio ci appare come un segnale pulsato, in quanto, a causa della struttura delle linee di campo, possiamo ricevere soltanto la radiazione diretta approssimativamente lungo l'orientazione del momento magnetico, disallineato rispetto all'asse di rotazione della stella (Fig.1.5).

Le pulsar a millisecondo si distinguono dalle pulsar "normali" per le seguenti caratteristiche.

- Campo magnetico basso ($B \sim 10^8 - 10^9$ Gauss rispetto ai 10^{12} Gauss di una pulsar "canonica");
- periodo rotazionale $P_{spin} \lesssim 20$ ms (contro $0.1-8$ s delle altre pulsar);
- alta frazione di binarie: $\gtrsim 80\%$ (rispetto all' 1% delle altre pulsar);
- velocità 3-dimensionale media bassa: 130 km/s (rispetto ai 460 km/s delle altre pulsar).

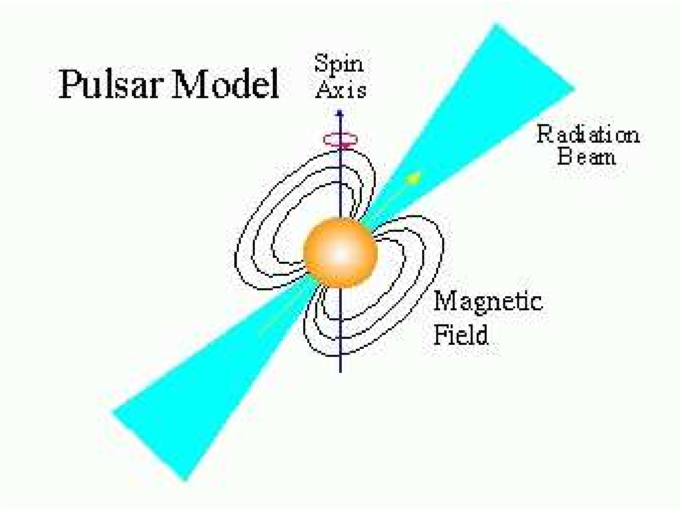


Figura 1.5: Schema semplificato del meccanismo di emissione di una pulsar.

Secondo il modello standard le pulsar a millisecondo sono stelle di neutroni "vecchie", che, dopo essersi spente come pulsatori radio (a causa della diminuzione della velocità rotazionale e del decadimento del campo magnetico), sono state **riciclate**, ossia sono state riaccelerate e si sono riaccese come pulsar grazie all'accrescimento di materia e di momento angolare da parte di una stella compagna.

Secondo questo modello, una stella di neutroni può diventare una pulsar a millisecondo solo quando si trova in sistemi binari. Tuttavia, sono state osservate anche MSPs isolate. Si ritiene che esse abbiano perso il compagno dopo la fase di riciclaggio per:

- interazioni di scambio;
- evaporazione della compagna.

Finora sono state scoperte 53 pulsar in ammassi globulari, di cui ben 44 sono MSPs (Tabella 1.1). Un numero notevole, se si considera che il numero totale di MSPs scoperte in tutta la Galassia è 84 (su 1401 pulsars). Quindi gli ammassi globulari ospitano di preferenza MSPs.
Un altro dato notevole è che solo 24 delle 44 MSPs trovate in ammassi globulari sono binarie (mentre sul totale della galassia le MSP binarie sono 71). Questo è una chiara indicazione del fatto che le binarie in un ammasso globulare molto spesso subiscono ionizzazioni ed altri eventi di scattering.

Gli oggetti esotici qui brevemente descritti sono particolarmente interessanti, in quanto rappresentano vere e proprie sonde che ci permettono di capire l'evoluzione, sia dinamica che stellare, dell'ammasso globulare ospite. Infatti la presenza di numerosi oggetti compatti ci può fornire una visione completa dell'evoluzione stellare dell'ammasso (funzione iniziale di massa, età della popolazione...). In aggiunta, la presenza di binarie esotiche (quali binarie di stelle di neutroni o binarie di buchi neri) ci può fornire informazioni, oltre che sull'evoluzione stellare, anche sulla natura delle interazioni dinamiche e sull'evoluzione dinamica globale dell'ammasso. Inoltre tali binarie esotiche rappresentano veri e propri laboratori di relatività generale.

Lo spirito di questa Tesi è proprio quello di sondare l'esistenza di un particolare tipo di binarie esotiche (le binarie di buchi neri) in ammassi globulari.

Nome PSR	Ammasso globulare	Distanza (kpc)	P (ms)	P_{orb} (giorni)
J0023-7204C	47 Tuc	4.5	5.757	...
J0024-7204D	47 Tuc	4.5	5.357	...
J0024-7205E	47 Tuc	4.5	3.536	2.26
J0024-7204F	47 Tuc	4.5	2.623	...
J0024-7204G	47 Tuc	4.5	4.040	...
J0024-7204H	47 Tuc	4.5	3.210	2.36
J0024-7204I	47 Tuc	4.5	3.485	0.23
J0023-7203J	47 Tuc	4.5	2.101	0.12
J0024-7204L	47 Tuc	4.5	4.346	...
J0023-7205M	47 Tuc	4.5	3.677	...
J0024-7204N	47 Tuc	4.5	3.054	...
J0024-7204O	47 Tuc	4.5	2.643	0.14
J0024-7204P	47 Tuc	4.5	3.643	0.15
J0024-7204Q	47 Tuc	4.5	4.033	1.19
J0024-7204R	47 Tuc	4.5	3.480	0.07
J0024-7204S	47 Tuc	4.5	2.830	1.20
J0024-7204T	47 Tuc	4.5	7.588	1.13
J0024-7203U	47 Tuc	4.5	4.343	0.43
J0024-7204V	47 Tuc	4.5	4.810	...
J0024-7204W	47 Tuc	4.5	2.352	...
J1312+1810	M 53	18.9	33.163	255.80
J1518+0205A	M 5	7.0	5.554	...
J1518+0204B	M 5	7.0	7.947	...
J1623-2631	M 4	1.8	11.076	191.44
J1641+3627A	M 13	7.7	10.377	...
J1641+3627B	M 13	7.7	3.528	1.26
J1701-3006	NGC 6266	6.7	5.241	...
J1701-3006B	NGC 6266	6.7	3.594	0.14
J1701-3006C	NGC 6266	6.7	3.806	0.21
J1721-1936	NGC 6342	11.6	1004.037	0.26
J1740-5340	NGC 6397	2.2	3.650	1.35
J1748-2446A	Terzan 5	7.1	11.563	0.07
J1748-2446C	Terzan 5	7.1	8.436	...
J1748-2021	NGC 6440	5.7	288.603	...
J1804-0735	NGC 6539	3.1	23.101	2.62
J1807-2459	NGC 6544	2.5	3.059	0.07
J1823-3021A	NGC 6624	8.0	5.440	...
J1823-3021B	NGC 6624	8.0	378.596	...
J1824-2452	M 28	5.5	3.054	...
J1910+0004	NGC 6760	4.1	3.618	0.14
J1911-5958A	NGC 6752	4.1	3.266	0.85
J1910-5958B	NGC 6752	4.1	8.358	...
J1911-6000C	NGC 6752	4.1	5.277	...
J1910-5959D	NGC 6752	4.1	9.035	...
J1910-5959E	NGC 6752	4.1	4.572	...
J2129+1210A	M 15	10.0	110.665	...
J2129+1210B	M 15	10.0	56.133	...
J2129+1210C	M 15	10.0	30.529	0.33
J2129+1209D	M 15	10.0	4.803	...
J2129+1210E	M 15	10.0	4.651	...
J2129+1210F	M 15	10.0	4.027	...
J2129+1209G	M 15	10.0	37.660	...
J2129+1209H	M 15	10.0	6.743	...

Tabella 1.1: Elenco delle 53 pulsar scoperte in Ammassi Globulari (settembre 2001). Sono elencati nome, ammasso di appartenenza, distanza, periodo di spin e, per le pulsar binarie, periodo orbitale.

Capitolo 2

Binarie negli ammassi globulari: scattering binaria-singola e binaria-binaria

In virtù delle elevate densità centrali, gli incontri gravitazionali rappresentano un elemento chiave per comprendere la dinamica di un Ammasso Globulare. In particolare, gli incontri tra binarie e stelle singole oppure tra binarie ed altre binarie hanno un ruolo peculiare nel bilancio energetico dell'Ammasso, in quanto comportano la conversione di parte dell'energia interna della binaria in energia cinetica traslazionale delle singole stelle o dei centri di massa delle binarie coinvolte nello scattering. In questo Capitolo prenderemo in esame le caratteristiche fondamentali delle binarie (concetto di *hardeness*, processi di formazione e distruzione delle binarie,...). In seguito ci soffermeremo sugli aspetti principali delle interazioni a 3 e 4 corpi coinvolgenti binarie (scambi energetici, sezioni d'urto, tempi scala, evoluzione della separazione orbitale delle binarie...) e sul ruolo che tali interazioni rivestono in un Ammasso Globulare (arresto del collasso gravotermo e formazione di oggetti stellari esotici).

2.1 Alcune caratteristiche delle binarie

2.1.1 Classificazione delle binarie

La distinzione che si fa più frequentemente, quando si considerano le binarie dal punto di vista dinamico, è quella tra

1. BINARIE HARD (o binarie strette);
2. BINARIE SOFT (o binarie larghe).

Per binaria hard si intende generalmente una binaria la cui energia di legame è maggiore dell'energia cinetica media di una stella dell'ammasso, ossia:

$$\frac{Gm_1m_2}{2a} \geq k_bT \tag{2.1}$$

oppure, equivalentemente

$$\frac{Gm_1m_2}{2a} \geq \frac{1}{2}\langle m\rangle\sigma^2 \tag{2.2}$$

dove m_1 e m_2 sono le componenti della binaria, a il semiasse maggiore, $\langle m\rangle$ la massa media delle stelle dell'ammasso, σ la loro dispersione di velocità, T la loro temperatura cinetica (all'equilibrio termodinamico) e K_B la costante di Boltzmann.
Una binaria soft sarà, viceversa, una binaria la cui energia di legame è minore dell'energia cinetica media delle stelle dell'ammasso globulare.

2.1.2 Origine delle binarie in un ammasso globulare

Esistono sostanzialmente tre possibili meccanismi di formazione di una binaria all'interno di un ammasso globulare:

1. collasso gravitazionale di una nube di gas;
2. interazioni a tre corpi fra stelle già formatesi;
3. cattura mareale fra coppie di stelle già formate.

Nel primo caso rientrano le *binarie primordiali*, ossia quelle costituite da stelle che nascono, già gravitazionalmente legate, dal collasso e dalla frammentazione della stessa nube di gas.

Durante un incontro gravitazionale che coinvolge tre stelle aventi energia (sia quella totale sia quella di ognuna delle tre possibili "coppie") positiva, una delle tre stelle può portare via tanta energia cinetica da far sì che l'energia finale del sistema costituito dalle altre due sia negativa. Queste due stelle sono quindi divenute membri di un sistema binario nato per interazione a tre corpi. In questo modo vengono formate parecchie binarie soft. La maggior parte di queste è distrutta, ma quelle che sopravvivono possono stringersi fino a diventare hard. Conti dettagliati (Spitzer 1987 [92]) mostrano che il tasso di formazione di binarie hard per interazioni a tre corpi è:

$$\left(\frac{\mathrm{d}n_b}{\mathrm{d}t}\right)_{3b} = 0.90\frac{3^{9/2}n^3G^5m^5}{\sigma^9}$$

$$= 1.91 \times 10^{-13} \left(\frac{n}{10^4 \mathrm{pc}^{-3}} \right)^3 \left(\frac{m}{m_\odot} \right)^5 \left(\frac{10 \mathrm{km/s}}{\sigma} \right)^9 \mathrm{pc}^{-3} \mathrm{yr}^{-1} \tag{2.3}$$

dove n_b è la densità di binarie, n la densità di stelle, m la massa stellare media e σ la dispersione di velocità. Tra le binarie formate per interazione a 3 corpi possiamo annoverare anche le binarie nate per *scambio* di una delle componenti di una binaria preesistente con la stella di campo.

Infine, quando due stelle passano l'una molto vicina all'altra, le perturbazioni mareali producono accelerazioni della materia stellare relative al centro di massa delle stelle. L'energia interna ΔE_T guadagnata da ciascuna stella in questo processo di "stiramento mareale" è una frazione piccola dell'energia interna della stella, mentre è confrontabile con l'energia cinetica iniziale del moto relativo delle due stelle (che indichiamo con $K_{rel} = \frac{1}{2}\mu v^2$, dove μ è la massa ridotta, v la velocità relativa). Le due stelle si catturano l'un l'altra se:

$$\Delta E_{T1} + \Delta E_{T2} \geq \frac{1}{2}\mu v^2 \tag{2.4}$$

dove ΔE_{T1}, ΔE_{T2} rappresentano l'energia interna guadagnata rispettivamente dalla stella 1 e dalla stella 2.
L'orbita delle due stelle dopo la cattura ha un'eccentricità iniziale di poco inferiore all'unità. Tuttavia, dopo molti passaggi al periastro, ognuno dei quali comporta un ulteriore trasferimento di energia, l'orbita diventa pressoché circolare.
Dato il loro meccanismo di formazione, le binarie nate per cattura mareale (d'ora in poi TCB) sono solitamente molto strette (il loro semiasse maggiore tipico è dell'ordine di $3\,r_*$ secondo McMillan (1986) [63], $6\,r_*$ secondo Goodman & Hernquist (1991) [38], dove r_* è il raggio della stella più estesa), e quindi in generale più hard delle binarie primordiali o nate per interazione a tre corpi.

2.1.3 Popolazione di binarie in un ammasso globulare

La frazione di binarie negli ammassi globulari sembra essere inferiore alla media stimata per la nostra galassia ($\sim 50\%$). Le prime ricerche di binarie spettroscopiche contenenti giganti non avevano, in effetti, fornito l'evidenza di una tale popolazione di binarie negli ammassi globulari (Gunn & Griffin 1979 [41]). Successive osservazioni (Pryor 1985 [76], 1989 [77], Bolte 1991 [9], 1992 [10]) hanno evidenziato l'esistenza di binarie, la cui abbondanza risulta del 10% o più (Pryor 1989). L'ammasso NGC 6752, che riveste particolare importanza in questo lavoro di Tesi, presenta una frazione di binarie nel core particolarmente elevata, tra il 15 e il 38% (Rubenstein & Bailyn 1997 [83]).

2.2 Incontri binaria - stella singola

Nella trattazione e nelle simulazioni degli scattering[1] stella singola-binaria, si considerano generalmente i tre corpi come un sistema isolato, trascurando l'interazione gravitazionale tra le stelle dell'ammasso. Questa approssimazione è legittima se l'autogravità delle stelle di campo di massa caratteristica m_* è trascurabile rispetto alle forze in gioco durante lo scattering. Seguendo le indicazioni di Hills (1983 [49]), tale condizione è sicuramente verificata quando:

1. gli oggetti interagenti con la binaria sono molto meno massivi delle componenti di questa: $m_* \ll m_1, m_2$;

2. la massa totale di stelle di campo contenute in una sfera di raggio pari al semiasse maggiore della binaria è piccola, se confrontata con la massa della binaria, ossia
$$(m_1 + m_2) \gg \frac{4}{3}\pi a^3 n\, m_*$$
dove n è la densità di stelle.

A volte al posto della condizione 1, si adotta un criterio più rilassato (di cui anche noi faremo uso), per cui è sufficiente che la massa di ciascuna stella di campo sia molto minore della massa totale della binaria.

2.2.1 Evoluzione generale delle binarie negli scattering binaria - stella singola

La caratteristica peculiare degli scattering coinvolgenti binarie rispetto agli scattering tra stelle singole consiste nel fatto che si può verificare uno scambio tra l'energia interna della binaria e l'energia cinetica esterna della stella di campo[2]: parte dell'energia interna della binaria può essere convertita in energia cinetica della stella di campo e del centro di massa della binaria stessa, o viceversa parte dell'energia cinetica della stella di campo può andare ad accrescere l'energia interna della binaria (Merritt 2001 [64]). Nel primo caso si ha un aumento dell'energia di legame della binaria e un restringimento della separazione orbitale tra le sue componenti, mentre la stella di campo si allontana con un'energia cinetica maggiore di quella iniziale. Nel secondo

[1] Nel corso di questa Tesi useremo il termine scattering nel suo significato più generale, come sinonimo di incontro gravitazionale. Nella sezione 2.2.2 opereremo una distinzione più dettagliata tra i vari tipi di scattering.

[2] Nel corso di questa Tesi useremo indistintamente i termini "stella di campo", "stella proiettile" e "stella incoming" (e analogamente nelle sezioni dedicate alle interazioni a 4 corpi "binaria di campo", "binaria proiettile" e "binaria incoming") come sinonimi.

caso l'energia di legame diminuisce, la binaria si allarga e la stella di campo fugge all'infinito con una velocità inferiore.

Risulta spontaneo chiedersi se le binarie si comportano tutte allo stesso modo durante uno scattering oppure se vi sono differenze. In letteratura è ormai famosa la frase di P.Hut (1993) [53](ma l'idea era già presente nei lavori di Aarseth e Hills [2], Heggie [45], Hills [47]):

Soft binaries become softer and hard binaries become harder.

La validità di questa asserzione è garantita dai risultati di tutte le simulazioni effettuate negli ultimi trent'anni e poggia sulla teoria analitica sviluppata da Heggie nel 1975. Riassumiamo di seguito i concetti fondamentali della teoria di Heggie, filtrati attraverso la trattazione di Binney e Tremaine (1987) [8].

Consideriamo un sistema stellare omogeneo costituito da stelle singole, o di campo, e binarie. Le stelle di campo abbiano tutte la stessa massa m_a, densità ρ_a e dispersione di velocità σ, con una distribuzione maxwelliana delle velocità. La distribuzione delle velocità dei centri di massa delle binarie sia anch'essa maxwelliana con una dispersione di velocità σ_b.

Consideriamo una binaria costituita da due stelle di massa m_1 e m_2. L'*energia interna della binaria* (cioè l'energia totale meno l'energia cinetica associata al centro di massa) sarà:

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r} \tag{2.5}$$

dove $\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}$ è la massa ridotta e v il modulo della velocità relativa.

L'energia di legame della binaria E_b sarà data, all'equilibrio, dalla relazione kepleriana:

$$E_b = \frac{Gm_1 m_2}{2a} = -E \tag{2.6}$$

Ricordiamo, inoltre, che una delle quantità fondamentali nella descrizione di uno scattering è rappresentata dal parametro di impatto b, definito come la componente del vettore separazione iniziale tra la stella incoming e il centro di massa della binaria che è perpendicolare al vettore velocità iniziale V_0 della stella di campo. Procediamo distinguendo il caso delle binarie soft da quello delle binarie hard.

a) *Soft binaries become softer.* Dimostriamo questo asserto solo nel caso più semplice da trattare dal punto di vista analitico (in Heggie 1975 [45] si può trovare la trattazione completa), ossia per una binaria soft che subisce un incontro con una stella di campo ad un parametro di impatto molto minore della separazione orbitale. Sotto queste ipotesi, la stella di campo si avvicinerà ad una delle due componenti della binaria, ad esempio la stella 1, molto di più che all'altra. Pertanto la velocità della stella 1 ($\vec{v}_1$) subirà una perturbazione maggiore rispetto a quella della stella 2 ($\vec{v}_2$). Se trascuriamo il moto orbitale della binaria durante l'incontro (approssimazione impulsiva), possiamo scrivere il cambiamento di energia interna nell'incontro come:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\mu\Delta(v^2) = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}[\Delta\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \frac{1}{2}\Delta\vec{v}_1^2] \tag{2.7}$$

Il valor medio $D(\Delta E)$ del cambiamento di energia ΔE per unità di tempo si può ottenere sostituendo a $\Delta\vec{v}_1$ e $\Delta\vec{v}_1^2$ i coefficienti di diffusione (che rappresentano i cambiamenti medi per unità di tempo dovuti ad un gran numero di incontri gravitazionali della stellla test con le altre stelle dell'ammasso). Dopo alcuni passaggi, sfruttando il fatto che per una binaria soft $\mid \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \mid \ll \sigma$, raddoppiando il valore di $D(\Delta E)$ per tener conto degli incontri ravvicinati con la stella 2 ed assumendo per semplicità che $\sigma_b = \sigma_a$, otteniamo:

$$D(\Delta E) \simeq \frac{8\sqrt{\pi}G^2\rho \ln\Lambda}{\sigma}\frac{m_a m_1 m_2}{(m_1+m_2)} \tag{2.8}$$

dove $\ln\Lambda$ è il logaritmo coulombiano e ρ la densità di massa.
Dal momento che la quantità $D(\Delta E)$ rappresenta la variazione media di energia interna per unità di tempo, la binaria si allarga se $D(\Delta E) > 0$. Ma il segno della (2.8) dipende solo dal logaritmo coulombiano, dove $\Lambda \equiv \frac{b_{max}\sigma^2}{G(m+m_a)}$. Sotto le nostre ipotesi $b_{max} \approx \frac{a}{2}$ e $m_1 \approx m_2 \approx m_a$; per cui $\Lambda \approx \frac{a\sigma^2}{4Gm_a} \approx \frac{m_a\sigma^2}{|E|}$. Dalla definizione di binaria soft segue che $D(\Delta E) > 0$.
Il fatto che la binarie soft diventano sempre più soft acquistando energia interna dalle stella di campo si può ricavare anche con un'argomentazione basata sull'equipartizione dell'energia. Gli incontri gravitazionali possono essere visti come perturbazioni dell'orbita della particella ridotta. Se la binaria è molto soft, l'energia cinetica della particella ridotta è molto minore dell'energia cinetica della stella di campo. Poiché il sistema tende all'equipartizione, gli incontri tendono ad accrescere l'energia della particella ridotta e quindi ad accrescere l'energia interna della binaria.

b) *Hard binaries become harder.* Omettiamo la dimostrazione analitica di questo asserto, che è particolarmente laboriosa, sostituendola con un argomento statistico riportato da Binney e Tremaine. Dapprima bisogna evidenziare che la velocità iniziale relativa tra binaria e stella di campo è dell'ordine della velocità di dispersione σ, ossia molto minore della velocità orbitale delle stelle in una binaria molto hard. Allora si danno due casi:

1. Se l'energia di legame della binaria viene accresciuta durante l'interazione, allora la stella di campo guadagna energia cinetica estraendola dall'energia interna della binaria e fugge all'infinito.
2. Se in un primo tempo, quando la stella di campo si avvicina alla binaria, l'energia di legame di quest'ultima decresce, allora l'energia cinetica della stella di campo diventa così piccola che quest'ultima rimane legata alla binaria e forma un sistema triplo temporaneo. Quando una delle tre stelle viene eiettata dal sistema triplo, la sua velocità di fuga è tipicamente dell'ordine della velocità orbitale. Quindi la stella singola eiettata avrà una velocità più elevata della stella singola incoming. Per la conservazione dell'energia, l'energia interna E della binaria deve, pertanto, decrescere, mentre l'energia di legame $E_b(\equiv\ -E)$ aumenta.

In entrambi i casi considerati l'energia di legame aumenta, e quindi è dimostrato che le binarie hard diventano sempre più hard.

Bisogna agggiungere, però, che non tutte le binarie strette diventano più strette e viceversa non tutte le binarie larghe si allargano. Statisticamente una binaria hard subirà anche un certo numero di scattering in cui viene allargata, ed analogamente si verificheranno incontri in cui una binaria larga si stringe; ma il valore medio dello scambio energetico per urto suggerisce che la binaria hard tende a stringersi, la soft ad allargarsi (per maggiori dettagli si veda Goodmann e Hut 1993 [39]). Come vedremo nel capitolo VI questa circostanza si verifica anche nei sistemi da noi considerati.

2.2.2 Classificazione degli incontri singola-binaria

Sulla scorta di Sigurdsson & Phinney (1993) [88] le interazioni che hanno luogo in un incontro a 3 corpi possono essere distinte in:

1. *interazioni rapide* (*prompt interactions*), ovvero interazioni in cui la distanza quadratica media tra le stelle ha un solo minimo (secondo la definizione coniata da Hut e Bahcall[3]);

[3] Hut & Bahcall (1983) [52] definiscono distanza quadratica media tra le tre stelle la

2. *risonanze* (*resonant interactions*), ovvero interazioni in cui la distanza quadratica media tra le stelle ha più di un minimo.

I risultati di una interazione possono essere classificati in

1. *flyby*: incontro in cui lo stato finale è identico allo stato iniziale (Fig. 2.1-2.2), simbolicamente denotato con

$$(1,2) + (3) \longrightarrow (1,2) + (3)$$

2. *scambio* (*exchange*): incontro durante il quale la stella di campo diventa parte dello stato finale della binaria, mentre una delle componenti iniziali della binaria fugge all'infinito (Fig. 2.3-2.4)

$$(1,2) + (3) \longrightarrow (1,3) + (2)$$

3. *ionizzazione* (*ionization*): incontro in cui il sistema finale è costituito da tre stelle singole (Fig. 2.5)

$$(1,2) + (3) \longrightarrow (1) + (2) + (3)$$

4. *coalescenza* (*merger*): incontro in cui due delle tre stelle, solitamente le componenti della binaria originaria, si fondono in un unico oggetto; mentre la terza stella può rimanere su di un'orbita legata oppure fuggire all'infinito.

$$(1,2) + (3) \longrightarrow ((a+b), c)$$

oppure

$$(1,2) + (3) \longrightarrow (a+b) + (c)$$

5. *sistema triplo* (*triple system*): nel sistema finale tutte e tre le stelle interagenti si trovano su orbite gravitazionalmente legate. Tale sistema prende il nome di sistema triplo *gerarchico* quando due delle tre stelle si trovano su orbite molto strette rispetto alla terza, formando una sorta

quantità:

$$s(t) = \left[\frac{1}{3} \sum_{i=1,\, i \neq j}^{3} \mid \vec{x}_i(t) - \vec{x}_j(t) \mid^2 \right]^{1/2} \tag{2.9}$$

dove gli indici i e j labellano le singole stelle. È evidente che $s(t)$ è piccola solo quando tutte e tre le stelle sono molto vicine.

di sistema binario hard con una terza stella-satellite più lontana. Tuttavia, come vedremo, un incontro a tre corpi non può mai dare origine a un sistema triplo stabile.

$$(1,2) + (3) \longrightarrow (1,2,3)$$

I flyby e gli scambi possono essere sia risonanti che rapidi, mentre le ionizzazioni sono esclusivamente rapide.

Fatta questa classificazione sulla base di un criterio puramente morfologico, è legittimo chiedersi se ci sono ragioni fisiche per cui un incontro può dar luogo ad un flyby piuttosto che ad uno scambio o ad un qualsiasi altro esito. Cerchiamo di rispondere a questa domanda facendo di nuovo riferimento all'articolo di Sigurdsson & Phinney (1993) [88]. Chiaramente l'esito dello scattering è legato al tipo di scambio energetico che si è instaurato tra binaria e stella di campo. Definiamo prima di tutto due quantità necessarie per descrivere tale scambio.

Consideriamo un sistema costituito da tre masse puntiformi, m_1, m_2 e m_3, che si muovono sotto l'effetto della gravità newtoniana. Due delle masse, poniamo m_1 e m_2, siano inizialmente legate, mentre la terza (m_3) sia inizialmente posta all'infinito e si muova con velocità v_∞ rispetto al centro di massa della binaria. Poniamoci nel riferimento del centro di massa del sistema triplo. Si definisce *velocità critica* v_c la velocità minima che deve avere la stella di campo all'infinito per poter ionizzare la binaria, ossia (Hut & Bahcall 1983 [52]):

$$v_c = \sqrt{G\frac{m_1 m_2}{m_3}\frac{(m_1+m_2+m_3)}{(m_1+m_2)}\frac{1}{a}} \quad = \sqrt{\frac{G m_T}{a}\frac{\mu_{12}}{m_3}} \tag{2.10}$$

dove m_T è la massa totale del sistema ternario, μ_{12} la massa ridotta della binaria originaria, a la separazione orbitale iniziale di tale binaria.

Si definisce *pericentro* (p) della stella proiettile la distanza di massimo avvicinamento tra la stella proiettile ed il centro di massa della binaria. Introdotti la velocità critica e il pericentro, possiamo distinguere i seguenti casi.

1. Se il *pericentro* è *grande rispetto al semiasse maggiore iniziale della binaria*, ossia $p \gg a_0$, l'incontro produce un *trasferimento di energia trascurabile dalla binaria alla stella di campo*. Col termine trascurabile si intende che l'energia trasferita è piccola sia rispetto all'energia di legame iniziale della binaria ($\frac{G m_1 m_2}{2a_0}$), sia rispetto all'energia cinetica della particella ridotta all'infinito ($\frac{1}{2}\frac{m_3(m_1+m_2)}{(m_1+m_2+m_3)}v_\infty$). In particolare l'entità di questo trasferimento di energia può essere valutata tramite

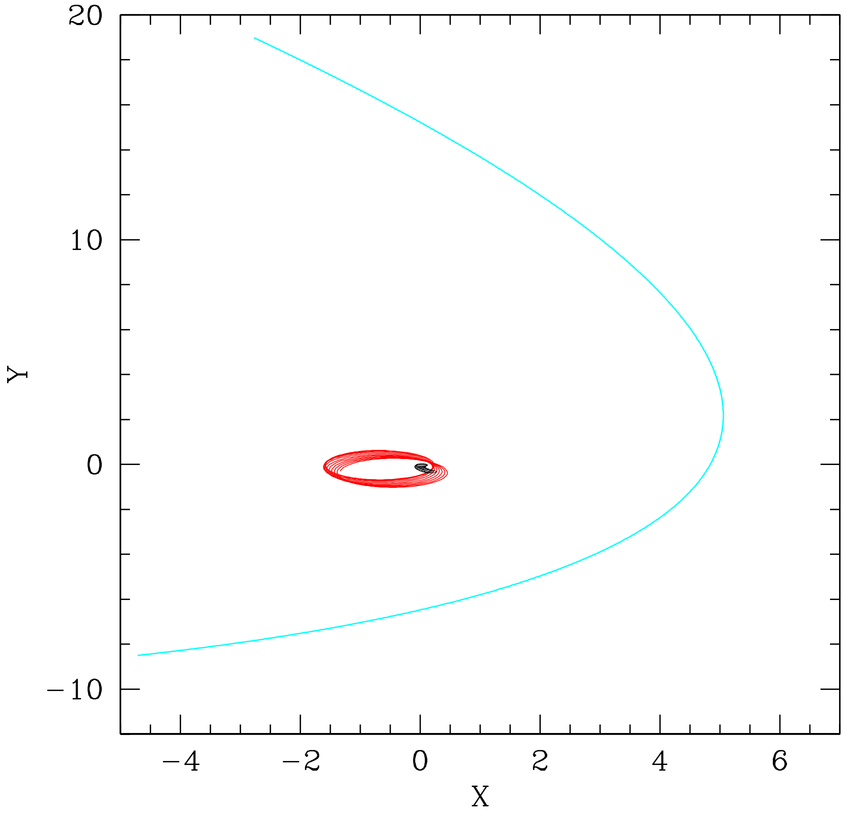


Figura 2.1: **Flyby rapido:** $m_1 = 100\, m_\odot$(*nera*), $m_2 = 10\, m_\odot$(*rossa*), $m_3 = 1.6\, m_\odot$(*ciano*). Simulazione effettuata con il codice a 3 corpi descritto al Capitolo 5.

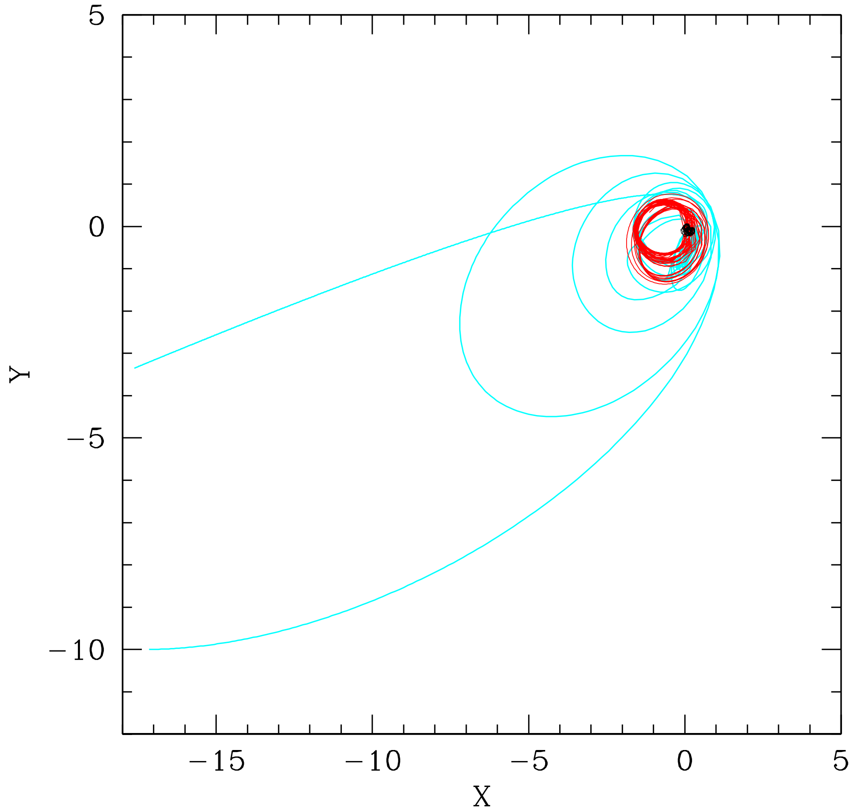


Figura 2.2: **Flyby risonante:** $m_1 = 100\, m_\odot (nera)$, $m_2 = 10\, m_\odot (rossa)$, $m_3 = 1.6\, m_\odot (ciano)$. Simulazione effettuata con il codice a 3 corpi descritto al Capitolo 5.

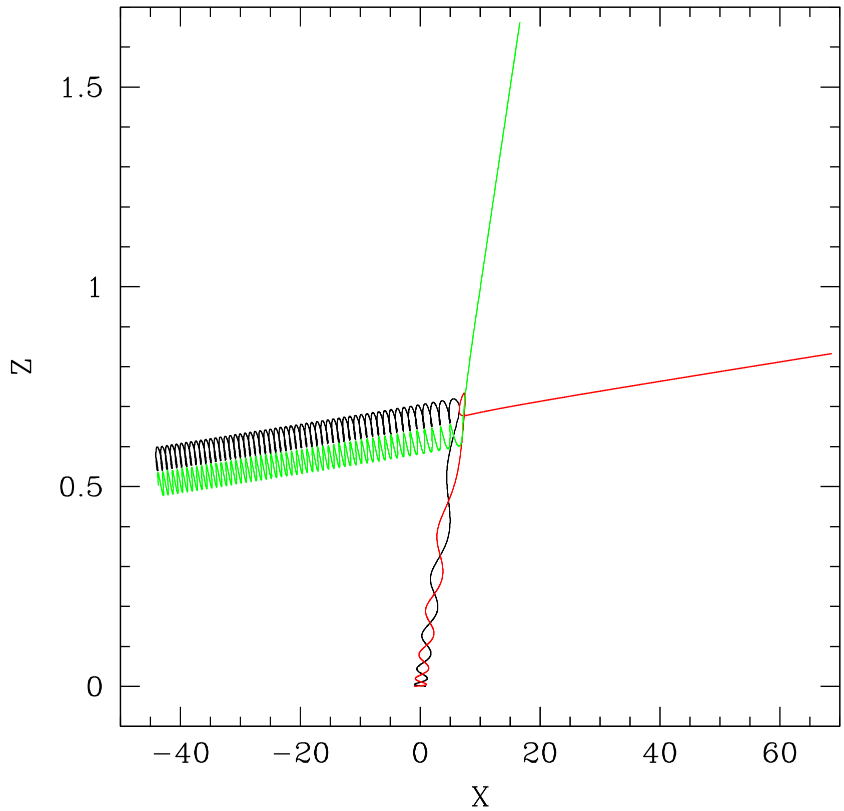


Figura 2.3: **Scambio rapido** fra tre stelle di egual massa ($=m_\odot$). La binaria iniziale è costituita dalle stelle indicate con il colore *rosso* e *nero*, la binaria finale dalle stelle indicate in *nero* e *verde*. Simulazione effettuata con il codice a 3 corpi descritto al Capitolo 5.

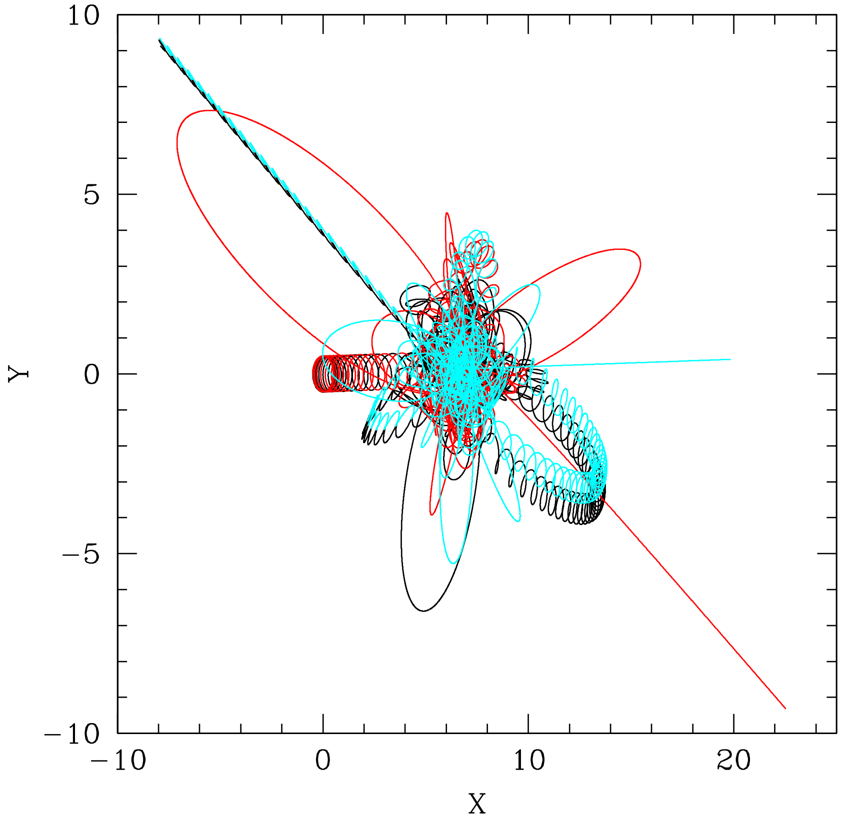


Figura 2.4: **Scambio risonante** fra tre stelle di egual massa ($=m_{\odot}$). La binaria iniziale è costituita dalle stelle indicate con il colore *rosso* e *nero*, la binaria finale dalle stelle indicate in *nero* e *ciano*. Simulazione effettuata con il codice a 3 corpi descritto al Capitolo 5.

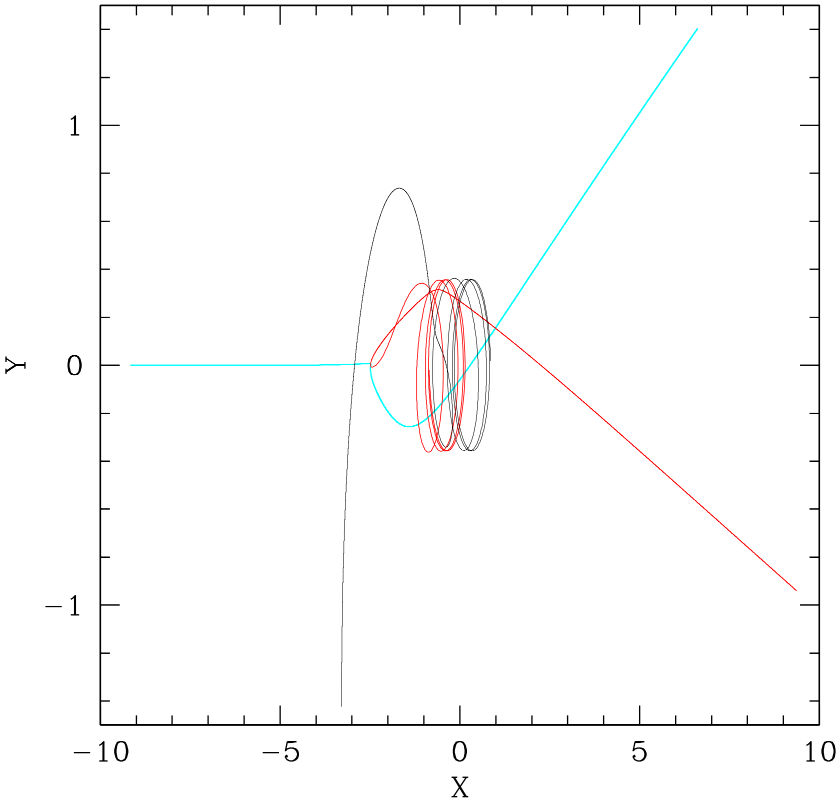


Figura 2.5: **Ionizzazione:** $m_1 = m_\odot$(*nero*), $m_2 = m_\odot$(*rosso*), $m_3 = 3\,m_\odot$(*ciano*). La binaria iniziale è costituita dalle stelle indicate con il colore *rosso* e *nero*. Simulazione effettuata con il codice a 3 corpi descritto al Capitolo 5.

la relazione ricavata da Heggie (1975):

$$\langle \Delta E \rangle \simeq \, - A \left(\frac{p}{a_0} \right)^{3/2} \exp \left[-B \left(\frac{p}{a_0} \right)^3 \right] \tag{2.11}$$

dove:

$$\begin{aligned} A &= \psi \sqrt{2} \left(\frac{G m_1 m_2}{2 a_0} \right)^{7/4} \left(\frac{1}{\mu_{12}} \right)^{1/4} \frac{m_3}{G^{3/2} m_T^2 \sqrt{m_1 m_2}} a_0^{3/2} v_\infty^{3/2} \\ &= \psi \sqrt{2} \left[\frac{G(m_1 + m_2)}{a_0} \right]^{1/4} \frac{m_1 m_2 m_3}{m_T^2} v_\infty^{3/2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

dove $\psi \simeq 1$ è un fattore numerico, e

$$B = \frac{1}{3} \frac{1}{3(m_1 + m_2)\sqrt{m_T}} \left(\frac{m_1 m_2}{m_3} \right)^{3/2} \left(\frac{v_\infty}{v_c} \right)^3 \tag{2.13}$$

In questo caso l'unico tipo di interazione che si può instaurare è il *FLYBY*

2. Per un *pericentro più piccolo*, il *trasferimento di energia* può essere *significativo*, e possono verificarsi diversi casi:

   2.1) l'energia può essere trasferita dalla binaria *alla stella di campo* tramite un

      2.1.a) *FLYBY*,

      2.1.b) oppure, soprattutto se la stella incoming ha massa confrontabile o maggiore di uno dei componenti della binaria, un *EXCHANGE PROMPT*.
      Sia nel caso di un flyby sia nel caso di uno scambio, la stella che al termine dell'interazione non fa parte della binaria fugge all'infinito con una *velocità finale maggiore della velocità iniziale* della stella incoming, ossia $v_{\infty fin} > v_\infty$.

   2.2) L'energia cinetica può essere trasferita dalla stella di campo *alla binaria*. Anche in questo caso ci sono varie possibilità.

      2.2.a) se il trasferimento di energia è piccolo rispetto all'energia cinetica iniziale della particella ridotta, cioè

$$\Delta E < \frac{1}{2} \left(\frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_T} \right) v_\infty^2 \equiv \Delta E_{crit} \tag{2.14}$$

      allora la binaria può

2.2.a.1) *rimanere intatta* (*flyby*),

2.2.a.2) oppure subire un *exchange*;

ma in entrambi i casi la stella che rimane fuori dalla binaria fugge all'infinito con *velocità finale inferiore rispetto a quella della stella incoming*, ossia $v_{\infty fin} < v_\infty$.

2.2.b) se il trasferimento di energia è maggiore dell'energia cinetica iniziale della particella ridotta, cioè

$$\Delta E > \Delta E_{crit} \tag{2.15}$$

2.2.b.1) se $v_\infty < v_c$, la stella di campo non può fuggire all'infinito e si verifica una *risonanza*;

2.2.b.2) se $v_\infty > v_c$, la stella di campo fugge all'infinito e la binaria viene *ionizzata*, oppure si verifica uno scambio prompt; ma non può esserci risonanza.

Per maggiore chiarezza riportiamo nella Tabella 2.1 uno schema riassuntivo dei casi considerati.

1) $p \gg a_0$	2) $p \leq a_0$					
trasferimento di energia cinetica alla stella di campo	2.1) trasferimento di energia cinetica alla stella di campo		2.2)trasferimento di energia cinetica alla binaria			
			2.2.a) $\Delta E < \Delta E_{crit}$		2.2.b) $\Delta E > \Delta E_{crit}$	
	$v_{\infty fin} > v_\infty$		$v_{\infty fin} < v_\infty$		$v_\infty < v_c$	$v_\infty > v_c$
	2.1.a)	2.1.b)	2.2.a.1)	2.2.a.2)	2.2.b.1)	2.2.b.2)
flyby	*flyby*	*exchange prompt*	*flyby*	*exchange*	*risonanza*	*ionizzazione*

Tabella 2.1: Classificazione delle interazioni a 3 corpi.

2.2.3 Sistemi tripli

Come abbiamo visto, quando la stella di campo cede energia cinetica alla binaria e la sua velocità iniziale v_∞ è troppo piccola per consentirle di ionizzare la binaria, si verifica una risonanza. Si forma, cioè un sistema triplo, detto anche *sistema triplo gerarchico*, perché costituito da una binaria stretta

(solitamente la binaria iniziale) con una terza stella su un'orbita molto più lontana ed eccentrica. Si può dimostrare (Chazy 1929 [13]) come nell'approssimazione di masse puntiformi senza interazioni mareali sia *impossibile formare un sistema triplo stabile*. Infatti, anche se l'orbita su cui viene catturata la stella di campo è molto larga ed eccentrica, il suo pericentro sarà approssimativamente alla stessa distanza dal centro di massa della binaria del punto di massimo avvicinamento iniziale al momento dell'incontro (cfr. Sigurdsson & Phinney 1993 [88]). Siccome a tale distanza la stella di campo subisce perturbazioni importanti (come è provato dal fatto che durante il primo incontro la sua traiettoria è stata deflessa fino a determinarne la cattura), e per di più siccome la binaria, avendo ceduto energia interna alla stella di campo, è diventa più larga e spesso più eccentrica, è inevitabile che ad ogni passaggio al pericentro la terza stella subisca una nuova perturbazione, ossia un nuovo trasferimento di energia, dello stesso ordine di grandezza di quello che ha determinato la formazione del sistema triplo. Questo susseguirsi di scambi di energia perturberà il sistema triplo fino a spezzarlo, eiettando una delle tre stelle.
Un'altra prova euristica a sostegno di questa tesi è quella fornita da Hut (1993) [53]: per la reversibilità temporale delle equazioni di Newton, se un sistema triplo isolato fosse stabile in ogni istante futuro, dovrebbe essere stabile anche in ogni istante passato. Questo esclude un evento di formazione del sistema triplo per incontro a tre corpi, che è l'inverso temporale di un decadimento spontaneo.
Tipicamente un sistema triplo si spezza entro pochi tempi dinamici (dove il tempo dinamico è determinato dal periodo della stella più esterna).
Basandosi sulla simulazione di 20000 binarie hard, Hills (1983) [49] osserva come la probabilità di cattura in un sistema triplo di lunga durata ($\geq 700\,T_{orb}$) aumenta significativamente al crescere della differenza in massa tra le componenti della binaria. Infatti dalle simulazioni risulta che la probabilità di formazione di un sistema triplo di durata superiore a $700\,T_{orb}$ è

$\sim 1\%$ se $m_1 = m_2$ (con $b = 0$, $e = 0$)

$\sim 30\%$ se $m_1/m_2 \simeq 100$

$\sim 50\%$ nel limite stella-pianeta ($m_1/m_2 \geq 10^4$)

Questa tendenza sembra confermata anche per le interazioni binaria - binaria (come vedremo dai risultati delle nostre simulazioni).

Un sistema triplo stabile si può formare per interazione a tre corpi, se, anziché lavorare nell'approssimazione di masse puntiformi, introduciamo un termine *dissipativo*, in quanto esso distrugge l'invarianza temporale delle equazioni del moto. Quindi l'inclusione della dissipazione negli strati esterni delle stelle dovuta a forze mareali può dar luogo a sistemi ternari stabili.

2.2.4 Entità degli scambi di energia

A questo punto è naturale chiedersi quale sia l'ordine di grandezza dell'energia scambiata nel corso di un incontro gravitazionale. Ci limiteremo qui a considerare solo quegli incontri gravitazionali in cui sono soddisfatte contemporaneamente le 3 seguenti condizioni.

1. La binaria coinvolta nello scattering è una *binaria hard*. Richiediamo questa condizione da una parte perché le binarie hard sono le uniche interessanti ai fini di questo lavoro di tesi, dall'altra perché (cfr. sezione successiva) il ruolo delle binarie soft sul bilancio energetico dell'ammasso è trascurabile.

2. La *distanza di massimo avvicinamento* è dell'ordine di grandezza della separazione orbitale (cioè $p \lesssim 2a$). Infatti gli incontri ravvicinati sono gli unici in cui il trasferimento di energia è importante (per gli incontri con $p \gg a$ abbiamo, del resto, già riportato la relazione ricavata da Heggie, eq. 2.11)

3. La *massa della stella di campo è trascurabile* rispetto alla massa della binaria.

Dalle simulazioni (Hills 1983 [49], Quinlan 1996 [80]) emerge che l'*entità dello scambio energetico medio per un singolo scattering è proporzionale alla massa della stella di campo e inversamente proporzionale alla massa totale della binaria*:

$$\frac{\Delta E_b}{E_b} \propto \frac{m_3}{m_1 + m_2} \tag{2.16}$$

Nel suo lavoro del 1983, basandosi sulle simulazioni di 20000 scattering coinvolgenti binarie hard, Hills trova che più è piccola la massa della stella di campo rispetto alla massa totale della binaria e più lo scambio di energia dovuto allo scattering diventa proporzionale alla massa della stella incoming. Hills definisce il *parametro di energia post-incontro* C come

$$C = \frac{(m_1 + m_2)}{2m_3} \frac{\langle \Delta E_b \rangle}{E_b} \tag{2.17}$$

dove $\langle \Delta E_b \rangle$ è la crescita media dell'energia di legame della binaria per un singolo scattering ed E_b l'energia di legame iniziale. Il fattore C è dell'ordine dell'unità; ma dipende debolmente da alcuni parametri dello scattering. Hills, in particolare, studia la dipendenza di C dall'eccentricità orbitale della binaria, dal rapporto tra le masse delle componenti della binaria e dal parametro di impatto.

1. *Eccentricità orbitale.* Dalle simulazioni effettuate si osserva una lieve crescita di C all'aumentare dell'eccentricità. In particolare, nel caso in cui $m_1/m_2 \simeq 1$ e $b = 0$, si trova che:

   - se $e = 0$, $C \simeq 1$;
   - se $e = 2/3$, $C \simeq 2$ (dove $e \simeq 0.7$ è, come vedremo, il valore dell'eccentricità tipico per una binaria);
   - se $e = 0.99$, $C \simeq 3$.

   L'andamento di C al variare di e si può fittare con una legge del tipo:

   $$C_0(e) = C_0(0) + C_1 e^2 \tag{2.18}$$

   dove $C_0(0) = 1.06$, e $C_1 = 2.23$.

2. m_1/m_2. Nel caso in cui $b = 0$ ed $e = 0$ si nota come C dipenda leggermente dal rapporto di massa tra le componenti della binaria. In particolare:

   - se $m_1 = m_2$, $C \simeq 1$;
   - se $m_1 > m_2$, C cresce fino a raggiungere un massimo ($C \simeq 2$), quando $m_1/m_2 \in [10, 30]$;
   - per $m_1/m_2 > 60$, C ricomincia a decrescere lentamente (fino ad un valore $C \sim 1.4$ se $m_1/m_2 > 200$).

   Tuttavia Hills sottolinea come la decrescita di C per alti valori di m_1/m_2 può essere dovuta all'aumento della probabilità di formazione di sistemi tripli di lunga durata nel caso in cui la binaria contiene un oggetto di massa dominante. Infatti tali sistemi tripli richiederebbero tempi troppo lunghi per essere integrati fino all'eiezione di una delle tre stelle, e quindi vengono esclusi dal calcolo degli scambi di energia (durante la formazione del sistema triplo la binaria deve cedere energia di legame e si allarga; quindi se includessimo nel bilancio energetico anche le simulazioni con sistemi tripli non integrati fino alla fine, otterremmo un $\langle \Delta E_b \rangle$ ancora più piccolo). Ma se, come è ragionevole attendersi, la terza stella, quando finalmente viene eiettata, ha acquisito una velocità confrontabile alla velocità orbitale della binaria, e quindi molto maggiore della velocità iniziale, allora questi eventi sono proprio quelli che comportano i maggiori scambi energetici. Quindi C si riduce solo in apparenza, perché vengono trascurati proprio gli eventi più probabili e più energetici. Come vedremo al Capitolo 6, la formazione di tali sistemi legati di lunga durata rappresenta un problema anche per le nostre simulazioni.

3. *parametro di impatto.* Dal lavoro di Hills il parametro di impatto risulta di gran lunga il fattore più importante nell'alterazione di C. Tanto è vero che gli effetti legati all'eccentricità e al rapporto tra le masse delle componenti della binaria sono importanti solo se si considerano scattering a parametro di impatto fisso. In particolare, l'entità del trasferimento di energia si riduce bruscamente all'aumentare del parametro di impatto. Ad esempio, se consideriamo un sistema con $e = 0$, $m_1/m_2 = m_2/m_3 = 100$, il parametro di scambio scende da $C \simeq 1.22$ per $b = 0$ a $C \simeq 0.005$ per $b = 20\,a$, dove a è il semiasse maggiore iniziale della binaria. In prima approssimazione, si può assumere che uno scattering comporta un trasferimento di energia significativo solo se la distanza di massimo avvicinamento tra la stella di campo e il centro di massa della binaria è dell'ordine di grandezza del semiasse maggiore della binaria (mentre il valore corrispondente del parametro di impatto dipende molto dalla focalizzazione gravitazionale).
   Poiché gli scattering a parametro di impatto nullo sono i meno probabili, è quindi ragionevole attendersi che il valore di C mediato su un campione di scattering effettuati con un opportuno range di parametri di impatto, sia inferiore al valore $1-3$ che le simulazioni di Hills per $b = 0$ sembrano suggerire. Ed infatti Quinlan (1996) [80] e Miller & Hamilton (2002) [66] scelgono come valore di riferimento per lo scambio energetico medio la seguente espressione:
   $$\frac{\langle \Delta E_b \rangle}{E_b} = \xi \frac{m_3}{(m_1 + m_2)} \tag{2.19}$$
   dove il coefficiente $\xi \equiv 2C$ è dell'ordine di $0.2 - 1$.

Da questa espressione dello scambio energetico medio si possono ricavare alcune utili considerazioni. Infatti possiamo scrivere:

$$\langle \Delta E_b \rangle = \xi \frac{m_3}{(m_1 + m_2)} E_b \tag{2.20}$$

Siccome $E_b = \frac{G m_1 m_2}{2a}$, nel limite in cui $m_1 \gg m_2$

$$\langle \Delta E_b \rangle = \frac{\xi}{2} \frac{G m_2 m_3}{a} \tag{2.21}$$

Quindi la variazione media di energia per scattering nel limite in cui $m_1 \gg m_2$ non dipende da m_1.
A proposito della velocità finale della stella di campo, dalla conservazione dell'energia nel sistema della particella ridotta si trova che

$$(v_{fin}^2 - v_{in}^2) = \xi \frac{G m_1 m_2}{(m_1 + m_2) a} \tag{2.22}$$

dove v_{in} e v_{fin} sono rispettivamente le velocità all'infinito della stella di campo prima e dopo lo scattering. Nel caso in cui $v_{fin} \gg v_{in}$, la relazione si può scrivere come:

$$v_{fin} = \left[\xi \left(\frac{G}{a}\right) \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\right]^{1/2} \tag{2.23}$$

Questo significa che:

- se $m_1 \gg m_2$,

$$v_{fin} \simeq \sqrt{\xi \frac{G m_2}{a}} \tag{2.24}$$

ossia la velocità di rinculo della stella di campo è $\sqrt{\xi}$ volte la velocità di un oggetto su di un'orbita circolare di raggio a attorno ad un corpo di massa m_2.

- se $m_1 = m_2$,

$$v_{fin} \simeq \sqrt{\frac{\xi}{2} \frac{G m_2}{a}} \tag{2.25}$$

ossia la velocità di rinculo della stella di campo è $\sqrt{\frac{\xi}{2}}$ volte la velocità di un oggetto su di un'orbita circolare di raggio a attorno ad un corpo di massa m_2.

2.2.5 Focalizzazione gravitazionale

Per *focalizzazione gravitazionale* si intende la deflessione della traiettoria della stella proiettile per effetto dell'attrazione gravitazionale esercitata dalla binaria, o meglio, se $m_1 \gg m_2$, esercitata dalla componente dominante della binaria.
L'effetto più importante della focalizzazione gravitazionale è quello di ridurre la distanza di massimo avvicinamento effettiva tra la stella di campo e il centro di massa della binaria (il *pericentro*) rispetto alla distanza di massimo avvicinamento misurata lungo la traiettoria imperturbata (il *parametro di impatto*).
Ricordiamo che per parametro di impatto si intende la componente del vettore separazione iniziale tra la stella proiettile e il centro di massa della binaria che è perpendicolare al vettore velocità iniziale v_0 della stella proiettile.
La relazione esplicita che lega il pericentro p al parametro di impatto b si ricava dalla conservazione dell'energia e del momento angolare nel sistema

della particella ridotta e nell'approssimazione di binaria puntiforme:

$$p = \frac{Gm_T}{v_\infty^2}\left[\sqrt{1 + b^2\left(\frac{v_\infty^2}{Gm_T}\right)^2} - 1\right] \tag{2.26}$$

Se $\frac{Gm_T}{(v_\infty^2 b)} \gg 1$, p può essere approssimato come:

$$p \simeq \; b^2\frac{v_\infty^2}{2Gm_T} \tag{2.27}$$

Quest'ultima relazione rappresenta proprio il limite in cui la focalizzazione gravitazionale è dominante.
La focalizzazione gravitazionale gioca un ruolo fondamentale in molti aspetti riguardanti gli scattering, quali la sezione d'urto (come vedremo nella sezione successiva) e, nel caso di incontri binaria-binaria, il tasso di ionizzazioni. L'importanza della focalizzazione gravitazionale si intuisce immediatamente, quando si considera che uno scattering comporta un trasferimento di energia significativo solo se la distanza di massimo avvicinamento tra la stella proiettile e il centro di massa della binaria è inferiore a qualche separazione orbitale. Se la focalizzazione gravitazionale è dominante, anche incontri con parametro di impatto molto grande presentano un pericentro piccolo, e quindi consentono scambi di energia significativi. Ad esempio, se $m_T = 500\, m_\odot$, $v_\infty = 7\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ e a, il semiasse maggiore iniziale della binaria, è di 1 A.U., imponendo che $p \simeq a$, si trova un parametro di impatto $b \simeq 135\, a \gg p$. Questo aspetto, come vedremo, è uno dei punti chiave nei risultati delle nostre simulazioni.

2.2.6 Sezione d'urto e tasso di collisione

La sezione d'urto può essere espressa semplicemete come l'area del cerchio il cui centro coincide con il centro di massa della binaria e il cui raggio è pari al parametro di impatto massimo per cui lo scambio energetico è non nullo (vedi Sigurdssonn & Phinney 1993), ossia:

$$\sigma_{coll} = \pi b_{max}^2 \tag{2.28}$$

Nel caso in cui la focalizzazione gravitazionale è importante, possiamo esprimere il parametro di impatto b in funzione del pericentro, utilizzando la (2.27):

$$\sigma_{coll} = \pi\left(\frac{2Gm_T}{v_\infty^2}\right)p \tag{2.29}$$

da notare che $\frac{Gm_T}{v_\infty^2}$ coincide con il raggio di influenza della binaria, ossia il raggio entro il quale l'attrazione gravitazionale esercitata dalla binaria sulle stelle di campo è dominante rispetto al potenziale dell'ammasso.
Ora, facendo di nuovo riferimento al fatto che lo scattering comporta un trasferimento di energia significativo solo se il pericentro è dell'ordine della separazione orbitale a, imponendo $p = a$, ricaviamo l'espressione della sezione d'urto per scattering cui faremo sempre riferimento d'ora in avanti:

$$\sigma_{coll} = \frac{2\pi a\, G\, m_T}{v_\infty^2} \tag{2.30}$$

In letteratura si possono trovare altre definizioni della sezione d'urto, riconducibili a questa nel caso in cui la binaria è hard e la focalizzazione gravitazionale importante. Ricordiamo, ad esempio, la sezione d'urto adottata da Davies (2002) [21](si vedano anche Davies, Benz & Hills 1992 [18], Davies, Benz & Hills 1992 [19], Davies & Hansen [20]):

$$\sigma_{coll} = k(q_1, q_2)\pi a^2 \left(1 + (v_c/v_\infty)^2\right) \tag{2.31}$$

dove v_c è la velocità critica definita dalla relazione (2.10), mentre $k(q_1, q_2)$ è un parametro ricavabile dalle simulazioni ed è una funzione di $q_1 \equiv m_2/m_1$ e $q_2 \equiv m_3/m_1$. Per una binaria hard in un ammasso globulare $(v_c/v_\infty)^2 \gg 1$. Quindi la (2.31) si può approssimare come segue.

$$\sigma_{coll} = k(q_1, q_2)\pi a^2 \left(v_c/v_\infty\right)^2 \tag{2.32}$$

Se $(m_1 + m_2 + m_3) \simeq (m_1 + m_2)$ e $m_2 \simeq m_3$, la (2.32) diventa pressoché identica alla (2.30).

Una volta ricavata un'espressione esplicita per la sezione d'urto, possiamo definire anche il *tasso di collisioni*, ossia il numero di interazioni che avvengono in media nell'unità di tempo:

$$R_{coll} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = n\, \sigma_{coll}\, v_\infty \tag{2.33}$$

dove N rappresenta il numero di collisioni ed n la densità di stelle. Sostituendo per σ_{coll} l'espressione (2.30), risulta:

$$R_{coll} = \frac{2\pi G\, m_T\, n\, a}{v_\infty} \tag{2.34}$$

Può essere utile anche conoscere una sezione d'urto distinta per ciascuno degli esiti possibili di uno scattering (es. una sezione d'urto per gli scambi, una per i flyby...). Sulla scorta di Sigurdsson & Phinney (1993) [88] definiamo la sezione d'urto per un processo X come una frazione $f(X)$ della sezione d'urto totale $\sigma = \pi b_{max}^2$:

$$\sigma_X = f(X)\pi b_{max}^2 \tag{2.35}$$

Si definisce analogamente la sezione d'urto normalizzata per il processo X come:

$$\tilde{\sigma}_X = \frac{\sigma_X}{\pi a^2}\left(\frac{v_\infty}{v_c}\right)^2 \tag{2.36}$$

Il tasso R_X a cui si verifica il processo X è dato da:

$$R_X = \langle n\sigma_X v_\infty \rangle \tag{2.37}$$

E il corrispondente tempo medio tra due eventi di tipo X sarà $T_X = R_X^{-1}$. Chiaramente $f(X)$ si ricava dal risultato delle simulazioni.

2.2.7 Tasso di hardening

È interessante notare che la variazione nel tempo dell'energia di legame di una binaria hard ($\frac{\mathrm{d}E_b}{\mathrm{d}t}$) in seguito alle interazioni gravitazionali è costante, nell'ipotesi in cui la massa delle sue componenti e i parametri d'ambiente (densità e velocità di dispersione delle stelle di campo) rimangano inalterati. Infatti la variazione dell'energia di legame di una binaria si può esprimere come:

$$\frac{\mathrm{d}E_b}{\mathrm{d}t} = (\Delta E_b)_{singoloscattering}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \tag{2.38}$$

dove N è il numero di collisioni. Sostituendo in $(\Delta E_b)_{singoloscattering}$ l'espressione (2.19) e in $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ il tasso di collisioni (equazione 2.34), otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_b}{\mathrm{d}t} &= \xi\frac{m_*}{(m_1+m_2)}E_b\frac{2\pi G(m_1+m_2)\,n\,a}{\sigma_*} \\ &= \xi(2\pi Ga)E_b\frac{\rho_*}{\sigma_*}\end{aligned} \tag{2.39}$$

dove m_1 e m_2 sono, come al solito, le masse delle componenti della binaria, a è la separazione orbitale, n la densità stellare, σ_* la velocità di dispersione e m_* la massa caratteristica di una stella di campo (quella che, facendo esplicito riferimento alle interazioni a tre corpi, avevamo chiamato m_3).
Siccome $E_b = (Gm_1m_2)/(2a)$,

$$\frac{\mathrm{d}E_b}{\mathrm{d}t} = (2\pi\xi)\frac{G\rho_*}{\sigma_*}\frac{Gm_1m_2}{2} \tag{2.40}$$

Come si vede, $\frac{\mathrm{d}E_b}{\mathrm{d}t}$ non dipende da a, e quindi, nell'ipotesi in cui m_1, m_2, ρ_* e σ_* siano costanti, non dipende neppure dal tempo.

Siccome l'energia di legame E_b di una binaria è una misura della sua "hardeness" (si veda la definizione 2.1), il fatto che E_b vari nel tempo con un tasso costante viene indicato in letteratura con l'affermazione che una binaria hard aumenta la sua "hardeness" a un tasso costante (*"a hard binary hardens at a constant rate"* Heggie 1975 [45], Quinlan 1996 [80], Merrit 2001 [64]).

Per stimare la hardeness di una binaria, vari autori (Quinlan 1996, Merrit 2001) usano, al posto di $\frac{\mathrm{d}E_b}{\mathrm{d}t}$, il parametro $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{a}\right)$. Quest'ultimo ha il vantaggio di non dipendere neppure dalla massa delle componenti della binaria, ma solo dall'ambiente (densità e velocità di dispersione stellari). Infatti:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{Gm_1m_2}\frac{\mathrm{d}E_b}{\mathrm{d}t} = 2\pi\xi\left(\frac{G\rho_*}{\sigma_*}\right) \tag{2.41}$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{a}\right)$ viene spesso chiamato *tasso di hardening* di una binaria e si trova solitamente espresso nei termini di una costante adimensionale $H \equiv 2\pi\xi$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{a}\right) = H\left(\frac{G\rho_*}{\sigma_*}\right) \tag{2.42}$$

Le stime di H presenti in letteratura sono tutt'altro che univoche. Dalle sue simulazioni Quinlan [80] trova $H \sim 16$; mentre Miller & Hamilton [66] riportano $\xi \sim 0.2$ e quindi $H \sim 1.3$.
Probabilmente questa differenza è dovuta al fatto che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{a}\right)$ è costante solo in prima approssimazione. Infatti, come abbiamo visto nella Sezione 2.4 di questo Capitolo, ξ dipende dalle caratteristiche della binaria (in particolare dal rapporto tra le masse delle sue componenti e dall'eccentricità) e dal range dei parametri d'impatto. Quindi eventuali differenze nella scelta delle condizioni iniziali delle simulazioni possono risolversi in una diversa stima di ξ. Le nostre simulazioni indicano $\xi \sim 0.5 - 1$.

La relazione (2.41) ci permette di trarre delle informazioni interessanti anche sul tasso di restringimento della separazione orbitale ($\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$). Infatti, siccome $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$, si trova:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -(2\pi\xi)\frac{G\rho_*}{\sigma_*}a^2 \tag{2.43}$$

Quindi $\mid \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \mid$ decresce, quando a diminuisce. Questo significa che più una binaria è stretta più è difficile stringerla, soprattutto perché la sua sezione d'urto di interazione si riduce.
Pertanto, mentre l'energia di legame di una binaria aumenta con un tasso, almeno in prima approssimazione, costante, la sua separazione orbitale si riduce sempre più lentamente.

2.2.8 Tempi scala

Definiamo qui alcuni tempi scala utili per comprendere la dinamica delle interazioni gravitazionali, ossia il tempo scala di collisione, di frizione dinamica, di hardening per scattering e di merging per onde gravitazionali.

1. Il *tempo di collisione*, t_{coll}, è definito come il tempo medio tra due collisioni (cfr. Miller & Hamilton 2002 [66]), o equivalentemente come il tempo necessario perché si verifichi una collisione. Si ottiene semplicemente invertendo il tasso di collisione:

$$t_{coll} = \frac{v_\infty}{2\pi G m_T n\, a} \tag{2.44}$$

2. Il *tempo di frizione dinamica*, t_{df}, è definito come il tempo necessario perché un corpo in moto con una velocità superiore a quella che avrebbe in condizioni di equilibrio termico con il mezzo venga frenato dall'interazione con le particelle circostanti fino al ristabilimento dell'equilibrio termico. t_{df} si ottiene dalla formula di Chandrasekhar per la frizione dinamica (Binney & Tremaine [8], p.424):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_M}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\pi \ln \Lambda G^2 (M + m_*) n\, m_*}{v_M^3} \left[erf(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} \exp -X^2 \right] \vec{v}_M \tag{2.45}$$

dove $X \equiv v_M/(\sqrt{2}\sigma_*)$, m_* e σ_* sono la massa caratteristica e la velocità di dispersione delle stelle del campo, Λ è il logaritmo coulombiano, M è la massa dell'oggetto inizialmente non in equilibrio termico con il mezzo e v_M la sua velocità. Sostituendo nella (2.45)i parametri tipici di un ammasso globulare, questa espressione si riduce a (Lin e Tremaine 1980 [58])

$$\frac{\mathrm{d}v_M}{\mathrm{d}t} = -2(2\pi)^{1/2} \frac{G^2 \rho_* M v_M}{\sigma_*^3} 0.376 \tag{2.46}$$

dove ρ_* è la densità di massa ($\rho_* = n\, m_*$).
Da cui deriviamo l'espressione del tempo di frizione dinamica a cui si farà riferimento nel corso di questo lavoro di Tesi:

$$t_{df} = \frac{1}{2(2\pi)^{1/2} 0.376} \frac{\sigma_*^3}{G^2 \rho_* M v_M} \tag{2.47}$$

Nel caso, particolarmente interessante ai fini di questa Tesi, in cui l'oggetto non in equilibrio termico con il mezzo sia una binaria hard, M è la massa totale della binaria ($M = (m_1 + m_2)$).

3. Il *tempo di hardening*, t_h, è definito come il tempo scala di riduzione del semiasse maggiore di una binaria hard per espulsione delle stelle di campo. Si ottiene utilizzando la relazione appena ricavata per il tasso di hardening (2.43):
$$t_h = \left| \frac{a}{\dot{a}} \right| = \frac{\sigma_*}{G\rho_* H} \frac{1}{a} \tag{2.48}$$
dove $H \simeq 16$ è il tasso di hardening.

4. Il *tempo di merging*, t_{gw}, è il tempo necessario perché una binaria coalesca per emissione di onde gravitazionali. Il processo di coalescenza per emissione di onde gravitazionali è descritto dalle equazioni di Peters (1964) [70].
$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_{gw} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^3 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \tag{2.49}$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)_{gw} = -\frac{304}{15} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^4 (1-e^2)^{5/2}} e \left(1 + \frac{121}{304}e^2\right) \tag{2.50}$$
Integrando all'ordine zero l'equazione (2.49), si ottiene l'espressione del tempo di merging (Quinlan 1996) [80]:
$$t_{gw} = \frac{5}{256} \frac{c^5 a^4 (1-e^2)^{7/2}}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} \tag{2.51}$$

Si possono trarre delle informazioni interessanti confrontando rispettivamente il tempo di collisione con il tempo di frizione dinamica e il tempo di hardening con il tempo di merging.

t_{coll} **vs** t_{df}**:** quanto più il tempo di collisione è breve, tanto più sono importanti gli scattering ravvicinati; mentre quanto più il tempo di frizione dinamica è breve, tanto più rapidamente gli scattering a piccolo angolo riportano all'equilibrio il sistema. Quindi

- se $t_{coll} \ll t_{df}$, un oggetto, anche massivo, che abbia acquistato una velocità elevata in seguito ad uno scattering ravvicinato subisce nuovi scattering violenti prima di essere frenato per frizione dinamica;
- se $t_{coll} \gg t_{df}$, la velocità acquisita in seguito a scattering ravvicinati viene rapidamente perduta.

t_h vs t_{gw}: quanto più il tempo di hardening è breve, tanto più rapidamente la binaria si stringe per aver eiettato stelle di campo; mentre quanto più è breve il tempo di merging, tanto più rapidamente la binaria coalesce per radiazione gravitazionale, senza riuscire ad eiettare stelle. Quindi:

- se $t_h \ll t_{gw}$, la binaria riesce a fare numerosi scattering prima di coalescere;
- se $t_h \gg t_{gw}$, la binaria coalesce rapidamente per emissione di onde gravitazionali, prima di aver potuto fare un numero significativo di scattering.

Eguagliando il tempo di hardening e il tempo di merging si può ricavare una lunghezza scala fondamentale, a_{gw}, ossia il valore della separazione orbitale al di sotto del quale domina l'emissione di onde gravitazionali:

$$a_{gw} = \left(\frac{256}{5} \frac{G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2) \sigma_*}{(1 - e^2)^{7/2} c^5 \rho_* H} \right)^{1/5} \tag{2.52}$$

2.2.9 Evoluzione della separazione orbitale

A partire da quello che abbiamo detto sul tasso di hardening e i tempi scala, possiamo tracciare l'evoluzione temporale del semiasse maggiore di una binaria hard. Infatti dalla relazione (2.43) possiamo ricavare un'equazione differenziale per la separazione orbitale:

$$-\frac{1}{a^2} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \xi 2\pi G \frac{m_* n}{\sigma_*} \tag{2.53}$$

(dove m_*, σ_* e n sono la massa caratteristica, la velocità di dispersione e la densità numerica delle stelle di campo) che si integra immediatamente:

$$-\int_{a_0}^{a(t)} \frac{\mathrm{d}a}{a^2} = \xi (2\pi G) \frac{\rho_*}{\sigma_*} \int_0^t \mathrm{d}t \tag{2.54}$$

$$a(t) = \frac{a_0}{\left(1 + a_0 \left(2\pi G \frac{\rho_*}{\sigma_*} \xi\right) t\right)} \tag{2.55}$$

Questa relazione ci permette di descrivere l'evoluzione della separazione orbitale della binaria nel tempo nell'ipotesi in cui la sola fonte di alterazione per a siano gli scattering. Come si vede l'evoluzione temporale del semiasse maggiore è governata principalmente dai parametri d'ambiente, ossia la densità di stelle di campo e la loro dispersione di velocità. Siccome, oltre

agli scattering, l'unico fenomeno che può far variare la separazione orbitale di una binaria è l'emissione di onde gravitazionali, è ragionevole affermare che l'equazione (2.55) descrive completamente l'evoluzione temporale della separazione orbitale nel caso in cui $a > a_{gw}$ (dove a_{gw} è definita in (2.52)).
Nel limite in cui $a_0 \gg \sigma_*/(2\pi G\rho_*\xi t)$,

$$a(t) \simeq \frac{\sigma_*}{2\pi G\rho_*\xi}\, t^{-1} \tag{2.56}$$

Le stesse equazioni possono essere riscritte in forma esplicita per il tempo, ossia:

$$t = \frac{(a_0 - a(t))}{a_0 a(t)} \frac{\sigma_*}{2\pi G\rho_*\xi} \tag{2.57}$$

Nel limite in cui $a_0 \gg a(t)$:

$$t \simeq \frac{\sigma_*}{2\pi G\rho_*\xi}\, a(t)^{-1} \tag{2.58}$$

Com'è ragionevole attendersi, il tempo di restringimento del semiasse maggiore è inversamente proporzionale alla densità di stelle di campo (ovviamente, più stelle ci sono con cui interagire, più rapidamente la binaria si stringe) e direttamente proporzionale alla loro velocità di dispersione (più lente sono le stelle di campo, più energia interna riescono a estrarre dalla binaria).
Se scegliamo $a(t) = a_{gw}$, la relazione (2.57) ci dice il tempo necessario perché una binaria con semiasse maggiore iniziale a_0, che si stringe progressivamente a causa degli scattering, raggiunga la separazione orbitale a_{gw}, al di sotto della quale essa coalesce principalmente per emissione di onde gravitazionali:

$$t = \frac{(a_0 - a_{gw})}{a_0 a_{gw}} \frac{\sigma_*}{2\pi G\rho_*\xi} \tag{2.59}$$

Questa relazione è molto interessante. Infatti ci aiuta a stabilire quanto tempo può sopravvivere una binaria prima di coalescere.

In modo analogo si può ricavare il numero di collisioni che una binaria deve fare per passare da una certa separazione orbitale a_0 ad una certa separazione $a(t)$, a partire dal tasso di collisioni R_{coll}.

$$N_{coll}(t) = \int_0^t R_{coll}\, \mathrm{d}t \tag{2.60}$$

Utilizzando l'espressione di $t(a)$ data dalla (2.43), si può effettuare il cambio di variabili $\mathrm{d}t = -\frac{1}{a(t)^2}\frac{\sigma_*}{2\pi G\xi\rho_*}\mathrm{d}a$:

$$N_{coll}(t) = -\int_{a_0}^{a(t)} \frac{1}{\xi} \frac{(m_1 + m_2)}{m_*} \frac{\mathrm{d}a}{a} \tag{2.61}$$

Anche qui l'integrazione è immediata, e risulta:

$$N_{coll}(t) = \frac{1}{\xi}\frac{(m_1 + m_2)}{m_*}\ln\left(\frac{a_0}{a(t)}\right) \tag{2.62}$$

Ponendo $a(t) = a_{gw}$, la relazione appena scritta ci permette di conoscere il numero di scattering che una binaria hard di semiasse maggiore iniziale a_0 deve fare per arrivare alla separazione orbitale al di sotto della quale l'emissione di onde gravitazionali diventa il meccanismo principale attraverso cui la binaria si stringe.

2.2.10 Crescita dell'eccentricità

All'equilibrio statistico l'eccentricità orbitale media di una binaria è pari a 2/3 (si vedano Jeans 1919, e Hills 1979). Poiché all'equilibrio statistico la probabilità che una binaria abbia un'eccentricità e è proporzionale ad e ($P(e) = 2e$, cfr. Sigurdsson & Phinney 1993), ci aspettiamo che la variazione di eccentricità in conseguenza degli scattering sia maggiore per sistemi di bassa che per sistemi di alta eccentricità.
Se, tuttavia, le binarie si trovano in un mezzo dissipativo, le loro orbite tendono a circolarizzare.
Inoltre dalle simulazioni di Hills (1983) [49] si vede come le perturbazioni sull'eccentricità diminuiscono rapidamente al crescere del parametro di impatto.
Analogamente a quanto fatto per il rate di hardening, Quinlan (1996) [80] definisce un parametro di riferimento anche per il tasso di crescita dell'eccentricità, che chiama parametro K.

$$K \equiv \frac{\Delta e}{\Delta \ln(1/a)} \tag{2.63}$$

Utilizzando la nota relazione kepleriana: $a = \frac{L^2}{G(m_1+m_2)}\frac{1}{(1-e^2)}$, si ottiene:

$$K = -\frac{(1-e^2)}{2e}\left(1 + 2\frac{\Delta L}{L}\frac{E}{\Delta E}\right) \tag{2.64}$$

2.3 Incontri binaria - binaria

2.3.1 Evoluzione generale delle binarie negli scattering binaria - binaria

Tutti gli argomenti presentati nella sezione dedicata allo scattering a tre corpi sono estendibili con qualche ulteriore complicazione agli scattering

binaria-binaria. Il meccanismo fondamentale che governa gli scambi energetici nel corso delle interazioni binaria-binaria rimane l'estrazione dell'energia interna dalla binaria.
Anche l'asserto per cui le binarie hard diventano sempre più hard continua a valere, nel senso che durante uno scattering binaria-binaria, sarà in generale la più hard delle due binarie (cioè quella con $E_{bin12} > E_{bin34}$) a stringersi.
L'energia interna perduta dalla più hard delle due binarie può andare ad accrescere l'energia cinetica del centro di massa della binaria meno hard, nel qual caso la binaria proiettile fugge all'infinito come se fosse una stella di campo; oppure può far aumentare l'energia cinetica interna della binaria più soft, allargandola ed eventualmente portando alla sua ionizzazione. Questa circostanza conferma la validità anche del secondo asserto di Heggie, quello per cui le binarie soft tendono a diventare più soft fino a ionizzarsi.
Ma, come vedremo dall'analisi delle simulazioni, nello scattering binaria-binaria possono verificarsi anche altri casi più esotici. Ad esempio, se le due binarie sono entrambe molto hard (come nei casi che abbiamo considerato in questa Tesi), si possono stringere entrambe, fornendo entrambe energia cinetica ai centri di massa. Oppure, quando una delle due binarie si ionizza, una delle sue due componenti può dar luogo con la binaria superstite ad un sistema triplo stabile.
Passiamo ad una analisi più dettagliata di questi scenari.

2.3.2 Classificazione degli incontri binaria - binaria

Riportiamo la classificazione degli esiti adottata da D. Bacon, S. Sigurdsson & M. B. Davies (1996) [6].

1. *flyby*: le due binarie rimangono intatte, senza che le loro componenti si siano scambiate; ma i parametri orbitali di ciascuna binaria (semiasse maggiore, eccentricità, etc.) possono essere alterati (Fig. 2.6).

2. *scambio*: le componenti delle due binarie si scambiano, producendo due nuove binarie.

3. *ionizzazione*: una delle due binarie si spezza. Si possono verificare due casi.

   3.1 due stelle vengono eiettate all'infinito e sopravvive *una binaria*;

   3.2 una stella viene eiettata all'infinito e sopravvive un *sistema triplo stabile o instabile di lunga durata* (Fig. 2.7-2.8).

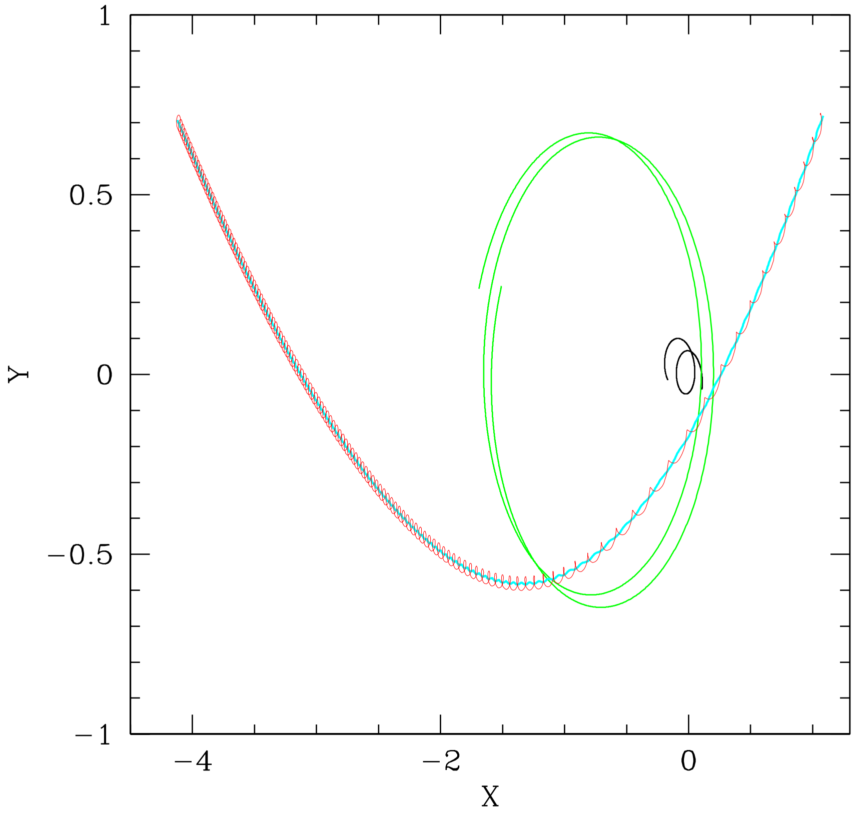


Figura 2.6: **Flyby prompt:** $m_1 = 30m_\odot$ (*nera*), $m_2 = 3m_\odot$ (*verde*), $m_3 = 1.4m_\odot$ (*ciano*), $m_4 = 0.2m_\odot$ (*rossa*)). Simulazione effettuata con il codice a 4 corpi descritto al Capitolo 5.

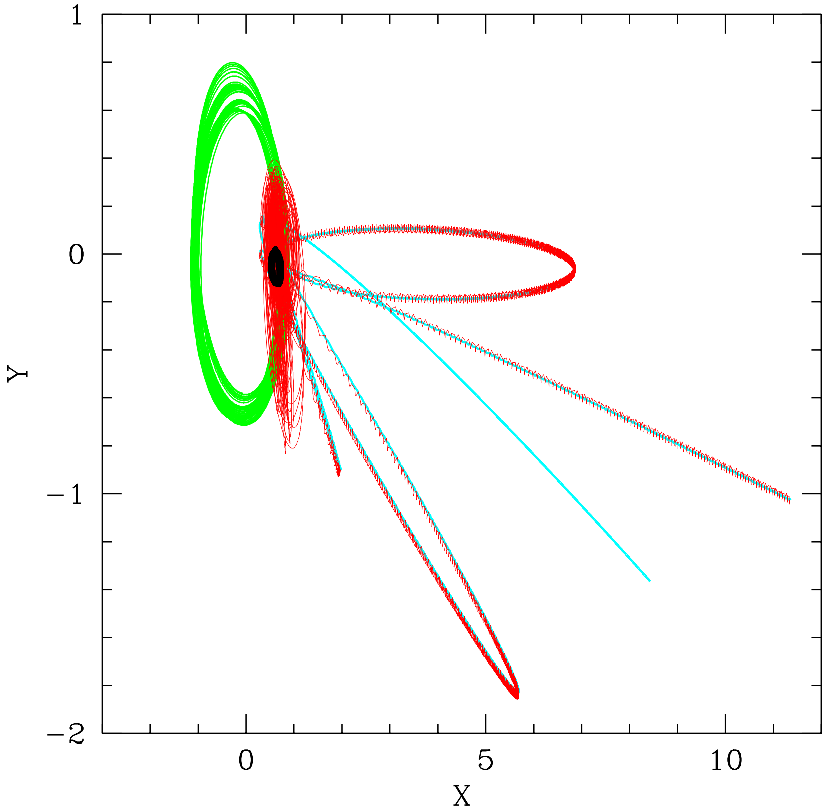


Figura 2.7: **Ionizzazione** della binaria più leggera e formazione di un sistema triplo con la stella 4 (*rossa*) ($m_1 = 100 m_\odot$ (*nera*), $m_2 = 10 m_\odot$ (*verde*), $m_3 = 1.4 m_\odot$ (*ciano*), $m_4 = 0.2 m_\odot$ (*rossa*)). Simulazione effettuata con il codice a 4 corpi descritto al Capitolo 5.

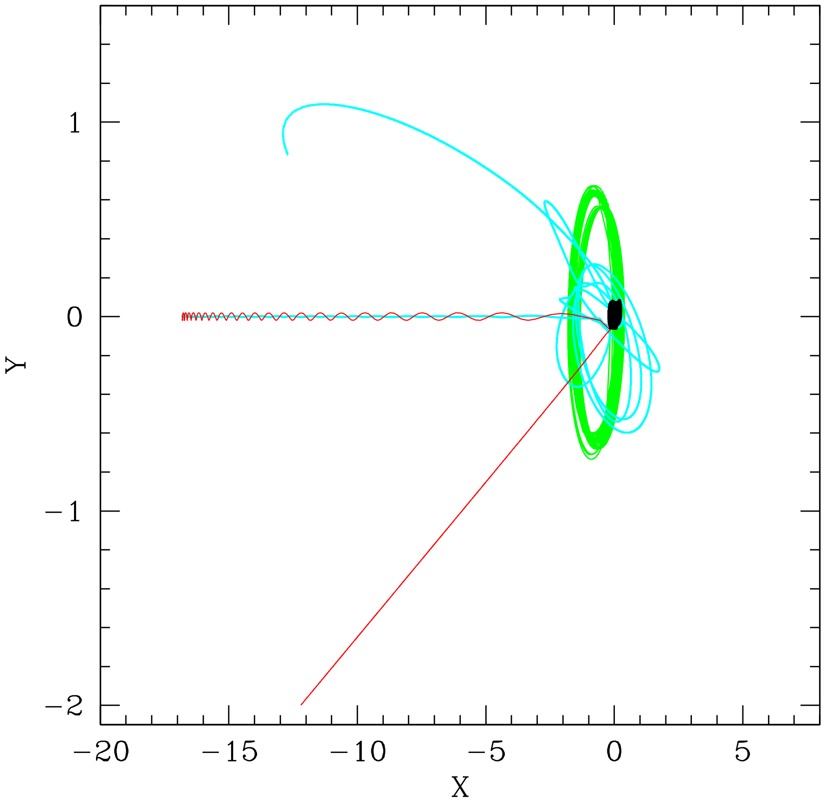


Figura 2.8: **Ionizzazione** della binaria più leggera e formazione di un sistema triplo con la stella 3 (*ciano*) ($m_1 = 100 m_\odot$ (*nera*), $m_2 = 10 m_\odot$ (*verde*), $m_3 = 1.4 m_\odot$ (*ciano*), $m_4 = 0.2 m_\odot$ (*rossa*)). Simulazione effettuata con il codice a 4 corpi descritto al Capitolo 5.

2.3.3 Sistemi tripli (e quadrupli)

Uno scattering binaria-binaria può dar luogo, anche nell'approssimazione di masse puntiformi, a sistemi tripli stabili. Questa circostanza può essere motivata sfruttando la solita argomentazione euristica basata sul time reverse. Se uno scontro binaria-binaria produce una stella singola e un sistema triplo, l'inversione temporale di questo evento sarebbe un incontro tra una singola stella e un sistema triplo, che sarebbe rimasto stabile se fosse stato isolato. L'argomentazione del time reverse ci permette anche di intuire la grande varietà di configurazioni che possono risultare da un incontro binaria-binaria; infatti sono stabili sia l'esito in cui tutte le stelle sono singole (doppia ionizzazione), sia la formazione di un sistema triplo con una stella singola, sia la conservazione di due binarie.

In letteratura (Harrington 1975 [42], Bacon et al. 1996 [6]) viene fornito un criterio valido in prima approssimazione per stabilire se un sistema triplo formatosi nel corso delle simulazioni è stabile. Siccome un sistema triplo gerarchico diventa instabile quando il pericentro dell'orbita della stella più esterna, che in generale è molto eccentrica, è dello stesso ordine di grandezza del semiasse maggiore della binaria più interna, è ragionevole supporre che un sistema triplo sia stabile quando

$$r_{p,3} > 3r_{ap,12} \tag{2.65}$$

dove $r_{p,3}$ è il pericentro della stella più esterna, mentre $r_{ap,12}$ è l'apocentro della coppia interna. Ovviamente la (2.65) si può scrivere anche nella forma:

$$a_3(1 - e_3) > 3a_{12}(1 + e_{12}) \tag{2.66}$$

dove a_3 e a_{12} sono i semiassi maggiori rispettivamente dell'orbita esterna e della binaria interna; mentre e_3 e e_{12} sono le rispettive eccentricità.
Tuttavia questo criterio non è sempre valido, soprattutto perchè nella realtà le perturbazioni dovute alle altre stelle dell'ammasso possono portare all'instabilità un sistema triplo che, se isolato, risulterebbe stabile.

Una considerazione analoga va fatta per quelle simulazioni in cui il sistema alla fine dell'integrazione è globalmente legato, ossia in cui l'energia totale di tutte e quattro le stelle (in generale formanti due binarie) è negativa. Continuare a integrare, per vedere se dopo un certo numero di orbite almeno una delle quattro stelle fugge all'infinito, non ha molto senso fisico, visto che la separazione delle orbite che si formano è almeno dello stesso ordine di grandezza della distanza media tra stelle nel core.

2.3.4 Entità degli scambi di energia

In letteratura non si trovano studi approfonditi degli scambi di energia che si verificano nel corso di interazioni a quattro corpi coinvolgenti binarie hard nell'approssimazione di stelle puntiformi. Tuttavia dalle nostre simulazioni emerge che nel caso in cui:

1. entrambe le binarie sono hard rispetto all'energia cinetica media delle stelle dell'ammasso;
2. una delle due binarie è molto più massiva dell'altra (e quindi possiamo considerarle rispettivamente come il bersaglio e il proiettile);
3. la distanza di massimo avvicinamento è abbastanza piccola perché si verifichi uno scambio di energia, ma abbastanza grande da non avere troppe ionizzazioni (in prima approssimazione $2a \geq p \geq (a/2)$);

lo scambio medio di energia per scattering scala come il rapporto tra la massa totale della binaria meno massiva e la massa totale della binaria più massiva:

$$\frac{\Delta E_b}{E_b} \propto \frac{(m_3 + m_4)}{(m_1 + m_2)} \tag{2.67}$$

(dove $(m_3 + m_4)$ è la massa della binaria meno massiva, $(m_1 + m_2)$ la massa della binaria più massiva).
Questa relazione ricavata dalle simulazioni ci sembra ragionevole, poiché costituisce un'estensione della relazione trovata per gli incontri singola-binaria, nel caso in cui la binaria proiettile è così piccola rispetto alla binaria bersaglio da poter essere considerata puntiforme.
Quindi possiamo riscrivere la relazione (2.67) nella forma:

$$\frac{\langle \Delta E_b \rangle}{E_b} = \xi \frac{(m_3 + m_4)}{(m_1 + m_2)} \tag{2.68}$$

Dalle nostre simulazioni risulta che il fattore di proprozionalità ξ è circa $0.5 - 1$.

Si può estendere al caso dei quattro corpi anche la relazione definitoria della velocità critica (Bacon et al. 1996 [6]), ossia la velocità per cui l'energia totale del sistema nel riferimento del centro di massa dei quattro corpi è nulla:

$$v_c = \sqrt{\frac{G}{\mu} \left(\frac{m_1 m_2}{a_1} + \frac{m_3 m_4}{a_2} \right)} \tag{2.69}$$

dove $\mu \equiv \frac{(m_1+m_2)(m_3+m_4)}{m_T}$ è la massa ridotta del sistema formato dalle due binarie viste come puntiformi e concentrate nei rispettivi centri di massa, e $m_T \equiv (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$ è la massa totale; mentre a_1 e a_2 sono i semiassi maggiori delle due binarie.

2.3.5 Focalizzazione gravitazionale

Anche quanto è stato detto a proposito della focalizzazione gravitazionale si estende senza problemi al caso delle due binarie, e la relazione che fornisce la distanza di massimo avvicinamento è ancora:

$$p = \frac{Gm_T}{v_\infty^2}\left[\sqrt{1 + b^2\left(\frac{v_\infty^2}{Gm_T}\right)^2} - 1\right] \tag{2.70}$$

dove, però, $m_T = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$.
Se $\frac{Gm_T}{(v_\infty^2 b)} \gg 1$, ritroviamo il limite in cui la focalizzazione gravitazionale è dominante:

$$p \simeq \; b^2 \frac{v_\infty^2}{2Gm_T} \tag{2.71}$$

2.3.6 Sezione d'urto e tasso di collisione

Anche per la sezione d'urto e per il tasso di collisione possiamo estendere quanto già ricavato per i tre corpi. In particolare la sezione d'urto totale per gli incontri a 4 corpi sarà (Bacon et al. 1996 [6]):

$$\sigma_{coll} = \pi b_{max}^2 \tag{2.72}$$

Il tasso di collisione corrispondente sarà:

$$R_{coll} = \langle f_b n \sigma v_\infty \rangle \tag{2.73}$$

dove f_b è la frazione di binarie rispetto al totale di stelle nell'ammasso.

Anche in questo caso possiamo definire una sezione d'urto distinta per ogni processo X considerato: $\sigma_X = f(X)\pi b_{max}^2$, e la corrispondente sezione d'urto normalizzata:

$$\tilde{\sigma}_X = \frac{\sigma_X}{\pi(a_1^2 + a_2^2)}\left(\frac{v_\infty}{v_c}\right)^2 \tag{2.74}$$

dove a_1 e a_2 sono i semiassi maggiori delle binarie coinvolte. La relazione (2.74) si riduce a quella trovata per i tre corpi se $a_1 \gg a_2$, che è proprio il caso dei sistemi che ci interessano.

Il tasso corrispondente per un certo processo X è quindi:

$$R_{coll} = \langle f_b n \sigma_X v_\infty \rangle \tag{2.75}$$

Bacon et al., nell'articolo già citato, ricavano alcune importanti stime delle sezioni d'urto per ciascun processo (vedi Tabella 2.2), anche se considerano solo un ristretto range di parametri per le binarie ($(m_1 + m_2) \in [0.5, 1]\, m_\odot$, $(m_3 + m_4) \in [0.5, 1]\, m_\odot$, e_{12}, $e_{34} = 0$). In particolare si possono notare:

Tabella 2.2: Sezioni d'urto delle interazioni a 4 corpi. Bacon, Sigurdsson & Davies (1996).

Run	$\tilde{\sigma}$(outcome)		
	Scambio	Ionizzazione	Sistema Triplo
10d	0.12	1.2	0.40
11d	0.23	2.0	0.75
12d	0.59	3.5	1.1
13d	0.069	0.58	0.24
20d	0.14	1.2	0.51
21d	0.30	2.3	0.80
22d	0.56	4.5	1.0
10r	0.014	0.14	0.17
11r	0.029	0.41	0.41
12r	0.044	1.10	0.38
20r	0.012	0.23	0.27
21r	0.027	0.42	0.49
22r	0.046	1.25	0.24
30r	0.049	0.66	0.30
31r	0.11	1.2	0.46
32r	0.20	2.2	0.55
40r	0.053	0.75	0.36
41r	0.10	1.3	0.61
42r	0.21	2.7	0.83
50r	0.0013	0.011	0.049
51r	0.00086	0.067	0.070
52r	0.0026	0.26	0.014
60r	0	0.010	0.060
61r	0.00065	0.075	0.082
62r	0.0026	0.28	0.022

- la netta prevalenza della sezione d'urto per ionizzazione;
- la bassa frequenza degli scambi (mentre per lo stesso range di masse negli incontri a 3 corpi Sigurdsson & Phinney (1993) [88] avevano trovato un'assoluta prevalenza degli scambi rispetto agli altri esiti);
- la relativa importanza della formazione di sistemi tripli stabili. Evidentemente, allo scambio l'interazione binaria-binaria preferisce la formazione di sistemi gerarchici.

2.4 Il ruolo delle interazioni a 3 e 4 corpi negli ammassi globulari:

Gli scattering coinvolgenti binarie toccano due aspetti fondamentali nella descrizione e nello studio di un ammasso globulare.

1. L'evoluzione dinamica globale dell'ammasso, in quanto gli incontri a 3 e 4 corpi sembrano essere il meccanismo più importante in grado di arrestare il core collapse;

2. La produzione di oggetti stellari esotici, quali pulsar a millisecondo, binarie X di piccola massa e variabili cataclismiche.

Vediamo ora in dettaglio ciascuno di questi due aspetti.

1.Il ruolo delle binarie nell'evoluzione dinamica dell'ammasso

In generale le binarie soft non giocano un ruolo importante per il bilancio energetico dell'ammasso, dal momento che l'energia cinetica del loro centro di massa supera la loro energia di legame (Hut 1993 [53]).
Ben diverso sembra essere il ruolo delle binarie hard. Già negli studi di Hénon (1971, 1975) si ipotizza che le binarie hard siano in grado di arrestare il fenomeno noto come core collapse[4] e dare inizio ad una fase di ri-espansione della regione centrale dell'ammasso.
Ci sono principalmente due meccanismi attraverso cui le binarie possono "riscaldare" il core, ossia fornirgli l'energia necessaria per arrestare il collasso (Spitzer 1987 [92]):

1. riscaldamento cinetico;

2. riscaldamento gravitazionale.

Entrambi i processi si basano sulla conversione dell'energia interna della binaria in energia cinetica traslazionale delle stelle di campo "scatterate" dalla binaria.
Quando l'energia ceduta alla stella di campo non è molto superiore all'energia cinetica media per stella, allora la stella outcoming rimane nel core, depositando localmente l'energia guadagnata (riscaldamento cinetico). Se invece la variazione di energia è molto maggiore dell'energia cinetica media, la stella outcoming fugge dal core, con una riduzione dell'energia di legame globale del core, in quanto la stella eiettata non contribuisce più al potenziale del core (riscaldamento gravitazionale). Dal calcolo dei coefficienti di diffusione si vede che la maggior parte delle stelle scatterate ha velocità finale maggiore della velocità di fuga dal core, e quindi viene "perduta". Pertanto il riscaldamento cinetico non può giustificare da solo la riespansione. Al contrario,

[4]In termini elementari il processo noto con il nome di core collapse (o catastrofe gravoterma) può essere descritto nel seguente modo. Se per qualche ragione (ad esempio l'evaporazione delle stelle più veloci) il core perde energia cinetica, allora la sua energia potenziale aumenta, e, per l'equilibrio viriale, anche la sua energia cinetica cresce. Ma se l'energia cinetica globale del core cresce, aumenta anche il numero di stelle sufficientemente veloci da fuggire nell'alone. Quindi si instaura un meccanismo per cui il core continua a perdere energia cinetica e, poiché la sua energia potenziale continua ad aumentare, si contrae e collassa. L'alone funziona da "bagno termico", perché continua a ricevere stelle veloci dal core senza, però, scaldarsi.

il riscaldamento gravitazionale è efficace, perché molte sono le stelle perdute dalla buca di potenziale.
Le simulazioni N-body hanno evidenziato che, sia prendendo un modello di ammasso globulare dove ci sono solo binarie primordiali, sia prendendo modelli di ammasso globulare dove si formano anche binarie per cattura mareale e/o per interazioni a tre corpi, il riscaldamento prodotto dalle binarie è sufficiente ad arrestare il collasso e innescare la riespansione (Spitzer 1987). Inoltre le simulazioni realizzate con N relativamente piccolo (N$\sim 300-1000$) mostrano come negli stadi evolutivi più avanzati di un ammasso globulare isolato si tenda a formare una binaria centrale molto hard, con energia di legame paragonabile a quella dell'intero ammasso (Hut 1993 [53], Aarseth & Lecar 1975 [3], Aarseth 1985 [4]). Per ammassi formati da un numero di stelle molto maggiore è inverosimile pensare che una sola binaria possa giocare un ruolo così dominante, a meno che non si tratti di una binaria particolarmente "esotica". Sembra più ragionevole supporre che nel core si formi un certo numero di binarie molto hard, tali da regolare l'evoluzione dinamica dell'ammasso.

2.Gli scattering e la produzione di oggetti stellari esotici

Un secondo importante effetto delle interazioni coinvolgenti binarie è la produzione di oggetti stellari esotici, quali Variabili Cataclismiche (CVs), Blue Stragglers (BSs), Binarie X di Piccola Massa (LMXBs) e Pulsar a Millisecondo (MSPs), già descritti nel I capitolo.
Basandoci su un articolo del 2002 di M. B. Davies [21], cerchiamo di tracciare una mappa degli eventi di scattering che possono aver portato alla formazione di questi oggetti "esotici".

Variabili Cataclismiche_ Le CVs potrebbero essere nate da incontri mareali tra nane bianche e stelle di sequenza principale. La nana bianca si sostituirebbe ad una delle due stelle di sequenza principale costituenti la binaria iniziale (Davies 2002 [21]). Ma le CVs potrebbero essere anche il risultato dell'evoluzione di una binaria primordiale, dove la più massiva delle due stelle si è evoluta diventando una nana bianca.

Blue stragglers_ Le simulazioni idrodinamiche hanno evidenziato come le BSs potrebbero essersi formate dal merger di due stelle di sequenza principale di bassa massa durante un incontro singola-singola oppure singola-binaria, oppure binaria-binaria.

Binarie X di Piccola Massa e Pulsar a Millisecondo_ Come abbiamo già sottolineato, secondo il modello standard le MSPs sono frutto dell'evoluzione delle LMXBs. Benché sia le une che le altre siano relativamente abbondanti negli ammassi globulari, il numero delle MSPs sembra eccedere quello delle LMXBs. Per spiegare questa incongruenza sono stati cercati meccanismi in grado di produrre MSPs senza passare attraverso una prolungata fase di LMXBs. Dapprima sono stati investigati gli incontri stella di neutroni-stella di sequenza principale e stella di neutroni-gigante rossa. Ma in entrambi i casi la probabilità di questi incontri di tipo singola-singola è risultata troppo bassa. Considerando le interazioni singola-binaria e binaria-binaria, il numero di MSPs formate è dello stesso ordine del numero di LMXBs. La soluzione al problema potrebbe risiedere in un'ottica che tiene conto dell'evoluzione complessiva delle stelle dell'ammasso. Abbiamo visto che gli scattering tendono a portare nelle binarie le stelle più massive. Questo meccanismo avrebbe prodotto un certo numero di binarie costituite da una stella di neutroni con una stella di sequenza principale di massa $\sim 1.5-3\,m_{\odot}$. Tale sistema può produrre una Binaria X di Massa Intermedia (IMXB), in cui la stella di neutroni accresce materiale e momento angolare sufficiente per fare spin up in un tempo breve. Siccome masse dell'ordine di $1.5-3\,m_{\odot}$ sono oggi molto al di sopra della massa di turn-off negli ammassi globulari, il trasferimento di massa sarebbe avvenuto nel passato. Questo spiega perché oggi vediamo solo le MSPs e poche LMXBs, mentre le IMXBs non esistono più.

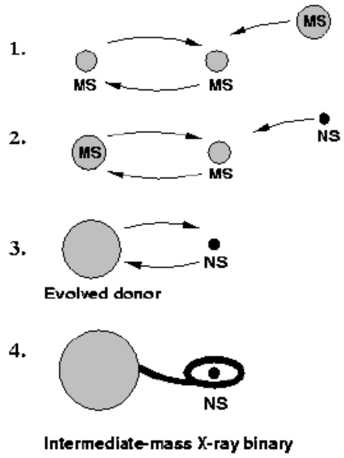


Figura 2.9: Formazione di una IMXB per interazione di scambio (Davies 2002).

Capitolo 3

BUCHI NERI negli AMMASSI GLOBULARI

In questo Capitolo si discute la possibilità che gli ammassi globulari siano sede di buchi neri di massa "intermedia" ($10^2 - 10^4\, m_\odot$, "Intermediate-Mass Black Holes", d'ora in poi IMBH), singoli oppure in sistemi binari con altri buchi neri. Dopo aver accennato ai processi di formazione dei buchi neri dalle stelle massive, tracceremo brevemente l'evoluzione dinamica dei buchi neri negli ammassi globulari, distinguendo tra una fase primitiva della vita dell'ammasso (in cui i buchi neri interagiscono violentemente tra di loro, eiettandosi a vicenda) e una fase più recente di interazioni dei buchi neri superstiti con le stelle del cluster. Presenteremo, quindi, i modelli teorici che descrivono l'evoluzione di un IMBH singolo o binario. Infine accenneremo alle più recenti indicazioni osservative dell'esistenza di tali oggetti.

3.1 Perché un ammasso globulare potrebbe ospitare un buco nero di massa intermedia o una binaria di buchi neri?

Dal punto di vista teorico l'idea che gli ammassi globulari possano essere sede di buchi neri e binarie di buchi neri poggia sulle seguenti argomentazioni.

1. È ormai universalmente accettato che in un ammasso globulare gli oggetti più massivi tendono a segregare verso il centro (*mass segregation*, si vedano L.Spitzer 1969 [90], J. M.Fregeau et al. 2002 [29]). Poiché le stelle che alla fine della loro vita si ritiene diano origine ai buchi neri e i buchi neri stessi sono tra gli oggetti più massivi di un ammasso globulare, è ragionevole che essi tendano a segregare verso il centro.

2. Nel core di un ammasso globulare, a causa delle elevate densità raggiunte ($\sim 10^5 - 10^6 \mathrm{pc}^{-3}$), le interazioni a tre corpi sono frequenti

(cfr. Cap.2). L'esito più probabile di queste interazioni, quando la stella proiettile è più massiva di almeno una delle due componenti della binaria, consiste in uno *scambio* tra la componente meno massiva della binaria bersaglio e la stella proiettile stessa. Quindi è assai probabile che un buco nero che segrega verso il centro entri a far parte di una binaria per interazione di scambio. Pertanto, è ragionevole supporre che nel core di un ammasso globulare si formino binarie contenenti buchi neri o *binarie di buchi neri*.

3. Ma i buchi neri che si ritiene si formino dall'esplosione di supernova di una stella di $m \gtrsim 25\, m_{\odot}$ dovrebbero avere masse dell'ordine di $10\, m_{\odot}$. Come si può, allora, arrivare a BH di $100 - 1000\, m_{\odot}$?
Un BH in un ammasso globulare di certo non può accrescere "mangiando" gas interstellare, poiché gli ammassi sono poverissimi di gas. Quindi bisogna trovare altre soluzioni.

   3.1 COALESCENZA_ Un BH in una binaria hard può crescere in massa per coalescenza (*merging*). Infatti, come abbiamo visto nel capitolo precedente, una binaria hard si stringe sempre di più in seguito alle interazioni a 3 e 4 corpi, fino a che coalesce per emissione di onde gravitazionali.
   Ma, durante ogni scattering, il centro di massa della binaria riceve una certa velocità di rinculo. Secondo alcuni autori (Sigurdsson & Hernquist 1993 [87], Miller & Hamilton 2002 [66]), se la massa totale della binaria è inferiore ad un certo valore critico ($\sim 50\, m_{\odot}$), la velocità di rinculo acquisita durante gli scattering è sufficiente a eiettarla dal core. Questo ci riporta al problema da cui eravamo partiti. Infatti, perché il BH possa crescere in massa fino a diventare un BH di massa intermedia, deve essere partito da una massa iniziale maggiore di $50\, m_{\odot}$, ossia non può essere nato dalla supernova di una stella di massa $\gtrsim 25\, m_{\odot}$.

   3.2 RISONANZA Kozai_ Miller & Hamilton (2002) [67] suggeriscono una strada affatto diversa, basata sulle interazioni binaria-binaria. Le simulazioni degli incontri a 4 corpi (Bacon et al. 1996 [6]) evidenziano che il 20-50% degli scattering binaria-binaria portano alla ionizzazione di una delle 2, all'eiezione di una stella e alla formazione di un sistema triplo gerarchico stabile. Se l'orbita della stella più esterna è fortemente inclinata rispetto all'orbita della binaria interna, si può verificare un processo secolare noto come *risonanza Kozai* (studiato in planetologia): nell'arco di molti periodi orbitali le perturbazioni dovute alla stella più esterna alterano l'eccentricità della binaria interna portandola a valori

molto elevati. Come sappiamo (cfr. Cap2, eq.2.51), se l'eccentricità è elevata, la binaria coalesce molto più rapidamente. Quindi anche una binaria si BH poco massivi può coalescere prima di essere espulsa dal core.
Un punto debole dell'idea di Miller & Hamilton è probabilmente rappresentato dal ristrettissimo range di valori dell'inclinazione tra i due piani orbitali del sistema gerarchico entro cui si può verificare la risonanza Kozai. Infatti la risonanza Kozai è efficace solo per angoli compresi tra $93 - 102°$.

3.3 CATTURA di STELLE_ Un BH singolo o entrambi i BH di un sistema binario possono crescere in massa per cattura mareale di stelle. Questo è forse il processo più efficace, purché, anche in questo caso, la massa iniziale del BH sia sufficientemente grande da permettergli di catturare un buon numero di stelle (dai nostri calcoli elementari -Cap.6, Sez.2.5- solo un BH di massa $\gtrsim 30\, m_\odot$ cresce significativamente). In prima approssimazione, si può dire che una stella viene "mangiata" dal BH quando la sua distanza al periastro è inferiore al raggio mareale, definito come:

$$r_t = r_* \left(\frac{M_{BH}}{m_*} \right)^{1/3} \tag{3.1}$$

3.4 EVOLUZIONE STELLARE_ Studi recenti (Fryer 1999 [30], Heger et al. 2002 [44]) evidenziano che una stella di bassa metallicità può formare un BH senza eccessive perdite di massa (cfr. Cap3, Sez.2). Ad esempio, una stella di massa $\sim 40\, m_\odot$ e metallicità nulla può formare un BH di massa circa uguale. Questo è interessante, se si considera che gli ammassi globulari ospitano stelle di popolazione II, e quindi con bassa metallicità ($[Fe/H] \sim -1.5$, anche se con numerose eccezioni).

Quindi dobbiamo concludere che i processi presentati ai punti 3.1, 3.2, e soprattutto 3.3 possono avere un ruolo importante nella crescita in massa dei BH nel core di un ammasso globulare; ma, perché si possa arrivare ad un IMBH, bisogna per forza passare dal punto 3.4, ossia bisogna poter formare un BH di massa iniziale $\gtrsim 30 - 50\, m_\odot$. I punti 3.1 e 3.2 verranno analizzati in dettaglio nella Sezione 3 di questo Capitolo. Per la discussione del punto 3.3 rimandiamo al Cap.6, Sez.2.5. L'analisi del punto 3.4 verrà affrontata nella Sezione 2 di questo Capitolo.

3.2 Formazione dei buchi neri di massa intermedia

Riguardo alla formazione di buchi neri di origine stellare rimangono ancora molte questioni irrisolte. In particolare, non è stato ancora interamente compreso il ruolo giocato dalla metallicità della stella progenitrice nella formazione del buco nero. Studi recenti (Fryer 1999 [30], Heger et al. 2002 [43], Heger et al. 2002 [44]) hanno affrontato il problema della metallicità, concentrandosi in particolare sulla differenza tra stelle di metallicità solare (*popolazione I*) e stelle di metallicità zero (*popolazione III*). Purtroppo manca una trattazione specifica delle stelle di metallicità intermedia (*popolazione II*), che sono proprio quelle presenti in un ammasso globulare. Il confronto tra i due casi estremi, popolazione I e III, può comunque fornire alcune informazioni importanti per il caso degli ammassi globulari.

La caratteristica dominante nell'evoluzione delle *stelle di popolazione I* è la costante perdita di massa attraverso venti stellari. Questo fa sì che la massa dell'oggetto finale, sia esso una nana bianca (d'ora in poi WD), una stella di neutroni (NS), o un buco nero (BH), è, in generale, molto minore della massa della stella progenitrice. Come si può vedere dalla figura 3.1,

- stelle di massa $m \lesssim 8\, m_{\odot}$ evolvono in WD di una massa solare circa, dopo aver perduto tutto il loro inviluppo nella fase di "asymptothic giant branch";

- stelle di massa $8\, m_{\odot} \lesssim m \lesssim 20 - 25\, m_{\odot}$ evolvono in NS (m$\sim 1.4\, m_{\odot}$), eiettando gli strati esterni con una esplosione di supernova.

- stelle di massa $m \gtrsim 25\, m_{\odot}$ presentano il fenomeno del *fall back*: una frazione consistente del core eiettato durante la supernova può "ricadere indietro" sulla NS. Se la massa finale dell'oggetto compatto supera la massa limite per una NS, si ha la formazione di un BH, la cui massa non sembra comunque superare le 10 $m_{\odot}$.

È evidente che la massa di un BH formato da una stella di metallicità pari a quella solare non può superare le $10\, m_{\odot}$.

Il lavoro di Heger (2002) [44] indica che la situazione per le *stelle di popolazione III* è ben diversa. Le principali differenze rispetto alle stelle giovani di alta metallicità sono due.

- La mancanza di metalli nelle stelle di popolazione III comporta una perdita di massa estremamente ridotta.

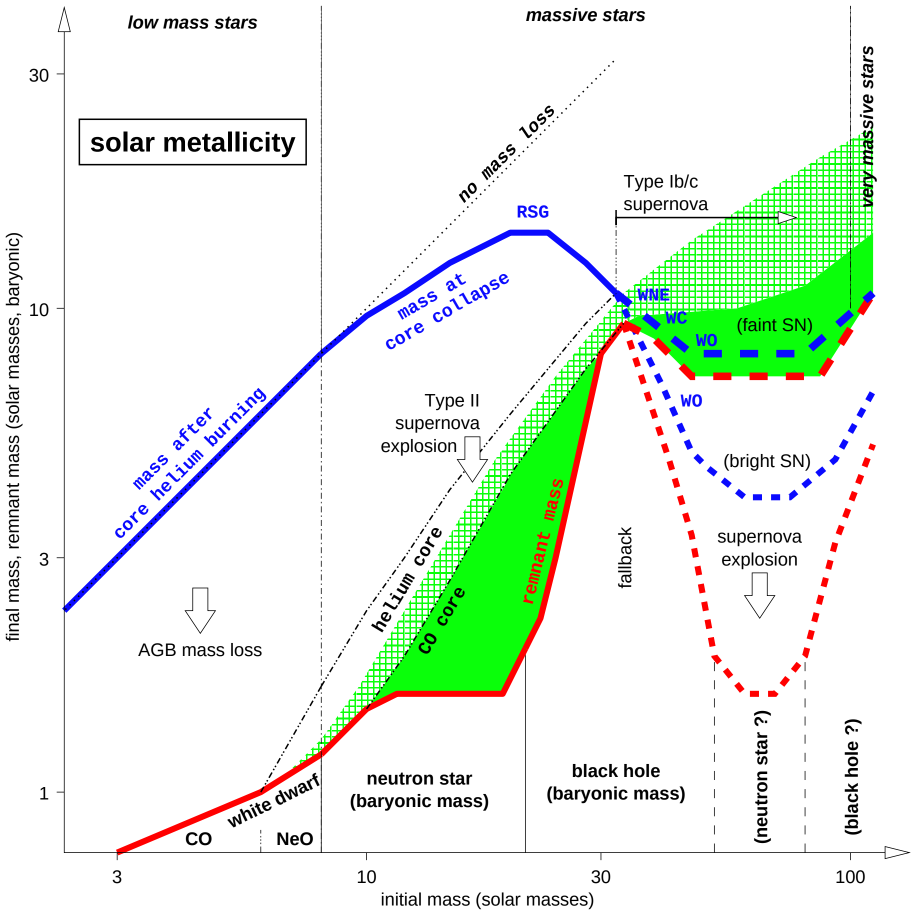


Figura 3.1: Massa dell'ogetto compatto finale in funzione della massa della stella progenitrice per stelle di metallicità solare (Heger et al. 2002).

- La prima generazione di stelle potrebbe essere più massiva di quella odierna. Studi recenti (si veda Heger 2002 [43], per una bibliografia più accurata) indicano che, per stelle di popolazione III (formate a redshift $z \sim 20$), la massa di Jeans può essere dell'ordine di $1000\, m_{\odot}$ (R. B.Larson 1998 [56]), mentre la funzione iniziale di massa (IMF) è piccata a $\sim 100\, m_{\odot}$ (T. Abel et al. 2002 [1], V. Bromm et al. 2001 [11], V. Bromm et al. 2002 [12]), oppure bimodale (Nakamura & Umemura 2001 [68]), con un massimo a $\sim 100\, m_{\odot}$ e uno a $\sim m_{\odot}$.

In virtù di queste caratteristiche, l'evoluzione delle stelle con metallicità nulla può essere descritta distinguendo i seguenti casi (Fig.3.2).

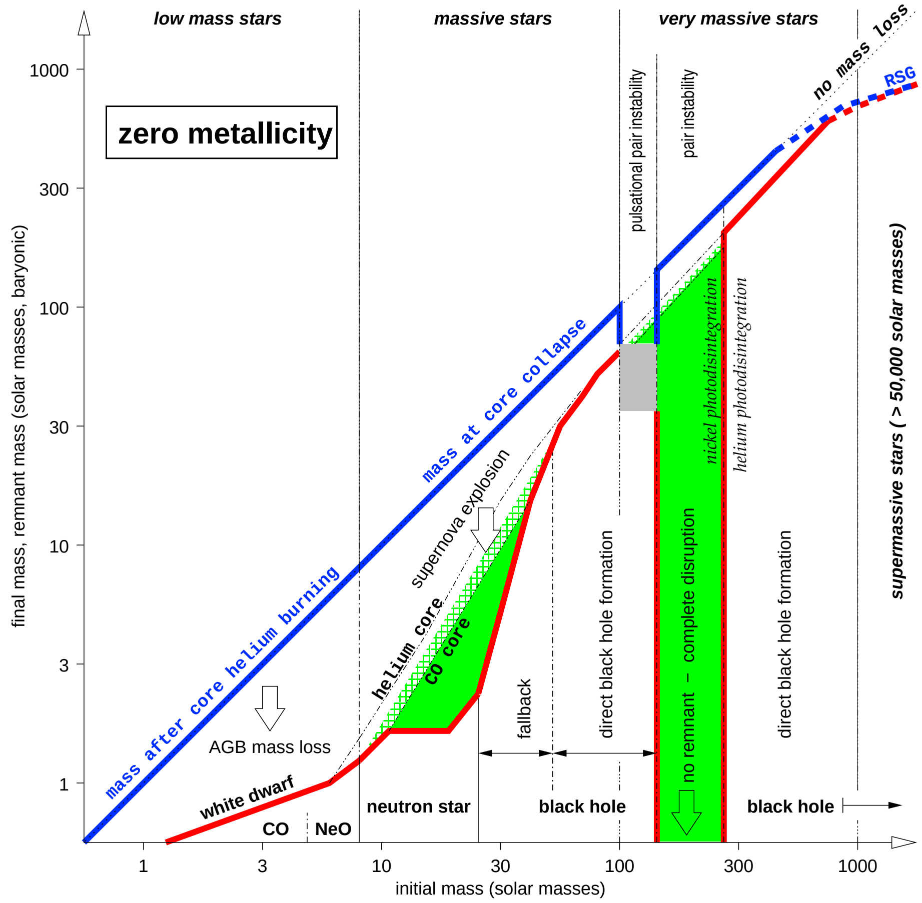


Figura 3.2: Massa dell'ogetto compatto finale in funzione della massa della stella progenitrice per stelle di metallicità zero (Heger et al. 2002).

- Stelle di massa $m \lesssim 35\, m_\odot$ hanno destino simile alle stelle di popolazione I, con l'unica differenza che la perdita di massa è più ridotta:

  - se $m \lesssim 8\, m_\odot$ formano WD;
  - se $8\, m_\odot \lesssim m \lesssim 25\, m_\odot$ formano NS;
  - se $25\, m_\odot \lesssim m \lesssim 35\, m_\odot$ formano NS che poi collassano in BH per fall back.

- Nelle stelle di massa $35\, m_\odot \lesssim m \lesssim 100\, m_\odot$ il BH viene formato direttamente per collasso gravitazionale, senza esplosione di supernova e con pochissima perdita di massa. Stelle di $100\,m_\odot$ possono dar luogo a BH di almeno $50\,m_\odot$.

- Se $100\,m_\odot \lesssim m \lesssim 140\,m_\odot$, le stelle incontrano l'instabilità per creazione di coppie elettrone - positrone dopo la fase di combustione del carbonio nel core. Questo conduce alla combustione rapida di ossigeno e silicio. Quando l'energia rilasciata in questo processo è sufficiente, il collasso si arresta e comincia l'esplosione di supernova. Al di sotto delle $140\,m_\odot$ l'esplosione eietta l'inviluppo di idrogeno, senza però distruggere l'intera stella.

- Per $140\,m_\odot \lesssim m \lesssim 260\,m_\odot$, l'esplosione di supernova distrugge completamente la stella, senza lasciare alcun resto compatto.

- La popolazione III comprende anche stelle di massa $m \gtrsim 260\,m_\odot$. In queste stelle la fotodissociazione delle particelle α, che sono a loro volta il risultato della fotodisintegrazione degli elementi del gruppo del ferro, abbassa la pressione abbastanza perché il collasso non si arresti, bensì continui fino alla formazione del BH. I buchi neri così formati potrebbero avere masse magiori di $200\,m_\odot$, ossia proprio di quell'ordine di grandezza che ci interessa.

Quindi stelle di metallicità zero potrebbero formare BH di massa $50 - 400\,m_\odot$. Il problema è che la popolazione degli ammassi globulari ha, generalmente, una metallicità bassa ma non nulla, dell'ordine di $0.02 - 0.04$ volte la metallicità solare. In letteratura mancano studi completi per stelle con questo tipo di metallicità. Nell'articolo già citato, Heger traccia alcune idee guida:

- quando la metallicità cresce, dapprima scompaiono le stelle supermassive che collassano direttamente in BH (ossia proprio le più interessanti dal nostro punto di vista).

- Esiste una metallicità massima al di sopra della quale non si verifica più l'instabilità per creazione di coppie positrone - elettrone, e quindi non ci sono più eventi di supernova capaci di disintegrare completamente una stella: qualsiasi stella massiva lascia un residuo compatto (e questa è invece una circostanza che potrebbe essere interessante, perché scomparirebbe la fascia proibita per i BH intorno alle $100\,m_\odot$).

- Bisogna quantificare meglio la perdita di massa. Infatti, se la perdita di massa non lascia interamente scoperto il core di He, si possono ancora formare direttamente BH di massa $\gtrsim 40\,m_\odot$ (e anche questo è un fatto molto importante).

- Se la stella progenitrice del BH si trova in una binaria, ci possono essere ulteriori complicazioni; ad esempio l'inviluppo di idrogeno può essere interamente perduto anche da stelle con metallicità bassa.

Ne dobbiamo concludere che la possibilità di formare BH di massa maggiore di $10\, m_\odot$ è una questione ancora molto aperta.

3.3 Le fasi iniziali della vita di un ammasso globulare: Evoluzione dinamica dei BH

Comunque si siano formati, i BH rivestono fin dall'inizio un ruolo fondamentale nell'evoluzione dinamica di un ammasso globulare. Innanzi tutto perché il loro numero, almeno all'inizio della vita dell'ammasso, è abbastanza elevato. Infatti, se tutte le stelle con massa $\gtrsim 25\, m_\odot$ danno origine a buchi neri, e se, assumendo la IMF suggerita da Scalo (1986), queste stelle sono lo 0.05% dell'intera popolazione, allora in un ammasso globulare contenente N stelle si formano $\sim 5 \times 10^{-4} N$ buchi neri (Portegies Zwart & McMillan 2000 [73]) con una massa iniziale $m_{BH} \sim 6 - 18\, m_\odot$ (ma, come abbiamo appena detto, il valore della massa è assai incerto). Questo significa che entro il raggio a metà massa di un ammasso globulare tipico (contenente $\sim 10^6$ stelle) dovrebbero essere nati circa 500 buchi neri.
Il punto chiave è: quanti di questi BH rimangono nell'ammasso?
Se il progenitore del BH è una stella singola, il BH risente di un kick natale piccolo o assente; quindi rimane nell'ammasso. Se, invece, la stella progenitrice appartiene ad una binaria, la perdita di massa che avviene durante la supernova può provocare l'eiezione della binaria ("Blaauw mechanism", 1962). Si ritiene che una frazione $\lesssim 10\%$ dei BH vengano espulsi dall'ammasso a causa del kick natale.

I BH che rimangono affondano nel core per effetto della segregazione di massa in un tempo pari a (Portegies Zwart & McMillan 2000 [74])

$$t_{relax BH} = \frac{\langle m \rangle}{m_{BH}} t_{relax} \tag{3.2}$$

dove t_{relax} è il tempo di rilassamento del raggio a metà massa, definito da:

$$t_{relax} = \left(\frac{R_h^3}{G M_h} \right)^{1/2} \frac{N_h}{8 \ln \Lambda_h}$$

dove R_h è il raggio a metà massa, M_h metà della massa dell'ammasso, N_h il numero di stelle contenute entro il raggio a metà massa e $\ln \Lambda$ il logaritmo coulombiano a R_h.

A causa dell'alta densità, nel core si verifica un'intensa attività di formazione di binarie in seguito ad interazioni a tre corpi, a cui partecipano anche i BH:

1. i singoli BH formano binarie preferibilmente con gli altri BH (Kulkarni, Hut & McMillan 1993 [55]);

2. i BH nati in binarie con una stella leggera scambiano il compagno con uno di massa maggiore, preferibilmente un altro BH.

In qualsiasi caso, è assai probabile che si formino numerose binarie di BH (Sigurdsson & Hernquist 1993 [87]) .
Una binaria di BH, se sufficientemente hard, continua a stringersi in seguito agli scattering a 3-4 corpi e tende a coalescere per emissione di onde gravitazionali, su un tempo scala che abbiamo visto essere (2.51)

$$t_{gw} = \frac{5}{256} \frac{c^5 a^4 (1-e^2)^{7/2}}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}$$

Imponendo che il tempo di merging sia inferiore al tempo di Hubble, si trova il valore del semiasse maggiore per cui la binaria coalesce entro un tempo di Hubble (t_H):

$$a_{gw\, t_H} = \left(\frac{256}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 (1-e^2)^{7/2}} t_H \right)^{1/4} \tag{3.3}$$

Sostituendo $a_{gw\, t_H}$ nella definizione di energia di legame si ricava il valore minimo dell'energia di legame per cui la binaria di BH può coalescere (Miller & Hamilton 2002 [66]):

$$E_{bin,gw} = \frac{G m_1 m_2}{2} \left(\frac{256}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 (1-e^2)^{7/2}} t_H \right)^{-1/4} \tag{3.4}$$

Ma (come abbiamo detto al punto 3.1), ogni scattering fornisce alla binaria una certa velocità di rinculo, e può provocarne l'espulsione dal core. Questa circostanza è importante, perché, una volta eiettata dal core, nell'alone dell'ammasso globulare la binaria trova una densità di stelle più bassa, e quindi può fare un minor numero di scattering, riducendo le sue possibilità di coalescere. Perché la binaria possa ricominciare a stringersi per interazioni gravitazionali, è necessario attendere che la frizione dinamica la riporti nel core.
L'energia cinetica minima che il centro di massa della binaria deve acquistare perché avvenga l'espulsione dal core è

$$K_{cin,escape} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{esc}^2 \tag{3.5}$$

dove la velocità di fuga per il core di un ammasso globulare è $v_{esc} \simeq 30 - 35\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Poiché l'energia interna della binaria ceduta durante l'incontro viene trasferita in parte al centro di massa della binaria stessa ed in parte all'oggetto incoming, dalla conservazione dell'energia segue:

$$\Delta E_{bin} = \frac{1}{2} m_{field} v_{rec,field}^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{rec,bin}^2 \tag{3.6}$$

dove m_{field} è la massa della stella (o del BH) di campo, mentre $v_{rec,bin}$ e $v_{rec,field}$ sono le velocità di rinculo acquisite rispettivamente dalla binaria e dall'oggetto di campo. Dalla conservazione del momento lineare:

$$(m_1 + m_2) v_{rec,bin} + m_{field} v_{rec,field} = 0 \tag{3.7}$$

Sostituendo la (3.7) nella (3.6), l'energia cinetica del centro di massa della binaria ($K_{cin,bin}$) risulta:

$$K_{cin,bin} = \frac{1}{\left(1 + \frac{(m_1+m_2)}{m_{field}}\right)} \Delta E_{bin} \tag{3.8}$$

Sostituendo in ΔE_{bin} l'espressione 2.19 ($\langle \Delta E \rangle = \xi \frac{m_3}{(m_1+m_2)} E_{bin}$), si trova:

$$K_{cin,bin} = \frac{1}{\left(1 + \frac{(m_1+m_2)}{m_{field}}\right)} \xi \frac{m_{field}}{(m_1 + m_2)} E_{bin} \tag{3.9}$$

Combinando la (3.5) e la (3.8) si trova che l'energia di legame minima perché il rinculo espella la binaria dal core è:

$$E_{bin,ej} = \frac{1}{2\xi}(m_1 + m_2 + m_{field}) \left(\frac{(m_1 + m_2)}{m_{field}}\right)^2 v_{esc}^2 \tag{3.10}$$

Confrontando $E_{bin,ej}$ con $E_{bin,gw}$, si può sapere, in prima approssimazione, se la binaria riuscirà a coalescere per interazione con i BH di campo prima di essere eiettata. Infatti

- se $E_{bin,ej} > E_{bin,gw}$, la binaria può coalescere prima di subire espulsione;
- se $E_{bin,gw} > E_{bin,ej}$, la binaria viene espulsa prima di poter coalescere.

Per un sistema con $e \simeq 0.7$, $v_{esc} \simeq 35\,\mathrm{kms^{-1}}$, $m_2 = m_{field} = 10\,m_\odot$, si trova che la massa minima che deve avere il BH dominante perché $E_{bin,ej} > E_{bin,gw}$ è dell'ordine di $40 - 50\,m_\odot$. Infatti:

$$E_{bin,gw} \simeq 1.31 \cdot 10^{49} \left(\frac{m_1}{50\,m_\odot}\right)^{3/4} \left(\frac{m_2}{10\,m_\odot}\right)^{3/4} \left(\frac{m_1 + m_2}{60\,m_\odot}\right)^{-1/4} \left(\frac{t_H}{t}\right)^{1/4} \mathrm{erg} \tag{3.11}$$

$$E_{bin,ej} \simeq 2.27{\cdot}10^{49}\xi^{-1}\left(\frac{m_1+m_2+m_3}{70\,m_\odot}\right)\left(\frac{m_1+m_2}{60\,m_\odot}\right)^2\left(\frac{10\,m_\odot}{m_{field}}\right)^2\left(\frac{v_{esc}}{35\,\mathrm{km\,s^{-1}}}\right)^2 \mathrm{erg} \tag{3.12}$$

Quindi, se la massa del BH dominante supera le $50\,m_\odot$, è possibile che la binaria riesca a coalescere.

A questo punto Miller & Hamilton [66] ipotizzano che il BH nato dal primo merging riesca a catturare altri BH e fare nuovi merging nell'arco di un tempo di Hubble, crescendo significativamente in massa. Quello che appare forzato nell'interpretazione di Miller & Hamilton è l'assunzione che l'oggetto nato dal primo merging continui a formare binarie per cattura di altri BH e a coalescere con lo stesso tasso calcolato per il primo evento; mentre è ragionevole supporre che buona parte dei BH che si trovavano inizialmente nel core ne siano stati espulsi in seguito a interazioni gravitazionali. Il ragionamento di Miller & Hamilton ha senso solo se assumiamo che il numero di BH che vengono espulsi dal core per scattering è bilanciato dal numero di quelli che, nati nell'alone o qui eiettati, segregano nel core per frizione dinamica.
Sembra, comunque, improbabile che anche in epoche recenti la frazione di BH nel core sia dominante sul resto della popolazione stellare.
Le simulazioni effettuate da Portegies Zwart e McMillan (2000) [73] confermano la nostra obiezione, mettendo in evidenza la tendenza del core a perdere rapidamente gran parte dei suoi BH. Infatti nel corso della simulazione il 92% dei BH inizialmente presenti nel core viene espulso dall'ammasso; mentre solo l'8% rimane nell'ammasso. Il 67% dei BH eiettati non appartiene a sistemi binari, il 32.5% si trova in una binaria di BH, mentre solo lo 0.5% è gravitazionalmente legato ad una stella. Inoltre circa la metà dei BH viene espulsa quando l'ammasso trattiene ancora più del 90% della sua massa iniziale.

Anche Sigurdsson & Hernquist (1993) [87] sembrano confermare il nostro punto di vista, delineando uno scenario in cui, durante le prime fasi della vita dell'ammasso, i BH binari e singoli interagiscono violentemente, eiettandosi a vicenda dal core nell'alone oppure fuori dall'ammasso globulare. Quelli che vanno a finire nell'alone ritornano rapidamente nel core per frizione dinamica e qui continuano a interagire violentemente, finché quasi tutti i BH vengono eiettati definitivamente dal core, in un tempo scala $\sim 10^8\mathrm{yr}/[(a/10^3\mathrm{A.U.})(n_{BH}/10^4\mathrm{pc}^{-3})]$.

Pertanto, dobbiamo concludere che, anche se in un'epoca remota della vita dell'ammasso globulare una binaria di BH può essere andata incontro a coalescenza in seguito a interazioni dinamiche con altri BH, tale processo non risolve il problema della formazione di un BH di massa $\sim 100-1000\,m_\odot$, in quanto

1. perché si verifichi il primo merging, il BH più massivo della binaria originaria deve avere una massa dell'ordine di $50\,m_\odot$, che, almeno nel caso

di elevate metallicità, non si spiega con gli attuali modelli di evoluzione stellare;

2. è improbabile pensare che ci sia stata una catena di merging tale da far almeno decuplicare la massa del BH (servirebbero almeno 5 eventi di merging con un BH di $10\,m_\odot$ ciascuno per far raddoppiare la massa di un BH di $50\,m_\odot$), tenendo conto della rapidità con cui l'amasso tende a perdere i suoi BH.

3.4 Le fasi avanzate della vita di un ammasso globulare: interazioni BH - stelle

Nell'articolo appena citato, Sigudsson & Hernquist [87] concludono che, indipendentemente dal numero iniziale di BH, la maggior parte di essi viene eiettata fuori dall'ammasso su un tempo scala breve rispetto al tempo di vita media dell'ammasso stesso. La popolazione finale dell'ammasso dipenderà dagli incontri random delle ultime 1 o 2 binarie di BH rimaste nel core. Tali binarie potrebbero fornire agli altri BH velocità di rinculo sufficienti da eiettarli tutti dall'ammasso; oppure alcuni BH potrebbero restare ancora legati all'ammasso globulare, anche se su orbite esterne al raggio di metà massa.
È possibile che in questo stadio avanzato della loro vita alcuni ammassi siano completamente privi di BH.

In alcuni ammassi, tuttavia, ci si aspetta di trovare BH superstiti che possono essere di tre tipi:

1. il singolo BH massivo o la binaria hard di BH che è rimasto/a nel core dopo aver eiettato tutti gli altri;

2. i BH formatisi nell'alone e che non hanno potuto raggiungere il core prima della conclusione della fase di interazioni violente tra BH;

3. i BH eiettati dal core su orbite legate ma esterne al raggio a metà massa.

I BH di tipo 2 e 3 trovano un core che è ormai (quasi) privo di BH, e quindi possono scivolare per frizione dinamica fino al centro dell'ammasso, dove:

1. se il core è completamente privo di BH, occupano loro stessi il centro della buca di potenziale;

2. se il core ospita ancora un "grosso" BH centrale oppure da una binaria molto massiva centrale, i BH che segregano o vengono di nuovo eiettati o vanno a formare un sistema gerarchico triplo-quadruplo con tale binaria.

A questo punto, poiché i BH, anche nel core, sono diventati una esigua minoranza, la popolazione dell'ammasso è ovunque dominata dalle *stelle*. In particolare nel core troviamo la componente stellare più massiva, formata da *stelle di neutroni* e *nane bianche pesanti* (Sigurdsson & Phinney 1995 [89]). Quindi il singolo BH o la binaria di BH (o il sistema triplo-quadruplo di BH) al centro dell'ammasso *subirà scattering non più con altri BH bensì con stelle.*

- Nel caso di un *singolo BH massiccio centrale*, come vedremo, la situazione è tutt'altro che chiara. Alcuni autori (Frank & Rees 1976 [28], Lightman & Shapiro 1977 [57], Shapiro 1977 [85]) ipotizzano che il BH si crei un cusp di stelle, ossia un gruppo di stelle che risentono del potenziale dell'ammasso in modo trascurabile rispetto al potenziale generato dal BH, e si possono pertanto considerare gravitazionalmente legate (bound) al BH. In questo caso gli scattering avvengono tra una stella o binaria "proiettile", non appartenente oppure marginalmente appartenente al cusp, il BH centrale e una stella del cusp . Durante lo scattering viene estratta energia interna dal sistema BH+stella del cusp, e quest'ultima riduce la sua distanza caratteristica dal BH, analogamente a quel che succederebbe ad una qualsiasi binaria hard.

- Nel caso del *BH binario*, gli scattering con le singole stelle, estraendo energia interna dalla binaria, ne riducono il semiasse maggiore orbitale.

Se, da una parte, il trasferimento di energia è notevolmente più piccolo per interazioni con stelle rispetto ad interazioni con altri BH (perché $\Delta E \propto \frac{m_{field}}{m_{bin}}$), dall'altra, ovviamente, anche la velocità di rinculo acquisita dalla binaria è considerevolmente ridotta. Quindi, anche se la binaria di BH si stringe più lentamente per interazioni con stelle rispetto alle interazioni con altri BH, il rischio che essa venga eiettata diventa praticamente nullo.
Le conseguenze di questo fatto riguardano sia il destino della binaria (dove per binaria, almeno per ora, consideriamo tanto la binaria di BH, quanto la binaria sui generis costituita da BH + stella del cusp) sia, soprattutto, quello delle stelle di campo. Infatti:

1. la binaria di BH, continuando a stringersi per scattering senza essere essa stessa eiettata, arriverà a coalescenza più rapidamente che se fosse soggetta alla sola emissione di onde gravitazionali.

2. La dinamica delle stelle di campo viene influenzata dalla binaria in vari modi, tra cui:

    2.1 molte stelle di campo dopo lo scattering con la binaria vengono eiettate dal core o addirittura dall'ammasso (Lin & Tremaine 1980 [58], Sigurdsson & Hernquist 1993 [87]);

2.2 alcune stelle di campo finiscono entro il raggio mareale della binaria e vengono distrutte, accrescendo in massa i BH;

2.3 le binarie che subiscono scattering con la binaria centrale possono andare incontro a ionizzazione.

Sviluppiamo adesso i punti qui elencati, distinguendo il caso del BH singolo+cusp da quello della binaria di BH.

3.5 BH singolo + cusp

3.5.1 Caratteristiche del cusp

Nell'ipotesi che al centro della buca di potenziale dell'ammasso si trovi un singolo BH di massa $m_{BH} \sim 10^2 - 10^4\, m_{\odot}$, si definisce *CUSP* di tale BH la regione compresa tra il raggio mareale r_t e il raggio di influenza r_a del BH (Frank & Rees 1976 [28], Shapiro 1977 [85]). Il raggio mareale è definito come la distanza dal BH a cui le interazioni mareali sono tali da provocare la cattura e distruzione di una stella, e si può esprimere come:

$$r_t \simeq r_* \left(\frac{M_{BH}}{m_*} \right)^{1/3} \tag{3.13}$$

dove m_* e r_* sono la massa e il raggio della stella catturata.

Il raggio di accrescimento o raggio di influenza del BH è defintito come la distanza dal BH entro cui le stelle con velocità di dispersione $\langle v_c^2 \rangle$ sono legate al BH di massa M_{BH}:

$$r_a \simeq \frac{GM_{BH}}{\langle v_c^2 \rangle} \tag{3.14}$$

Nell'ipotesi di stazionarietà in cui il cusp è continuamente riempito per effetto delle collisioni, il profilo di densità del cusp è descritto dalla relazione (Peebles 1972 [69], Bahcall & Wolf 1976 [7], Shapiro 1977 [85]):

$$n(r) \approx n_c \left(\frac{r}{r_a} \right)^{-7/4} \tag{3.15}$$

dove n_c è la densità di stelle nel core.
Quindi, sotto l'ipotesi di simmetria sferica spaziale, il numero di stelle nel cusp, N_{cusp}, può essere calcolato come:

$$N_{cusp} = \int_{r_t}^{r_a} n_c \left(\frac{r}{r_a}\right)^{-7/4} 4\pi r^2 \mathrm{d}r \tag{3.16}$$
$$= \frac{16}{5}\pi n_c r_a^{7/4}(r_a^{5/4} - r_t^{5/4})$$

Se $n_c \simeq 2 \cdot 10^5 \mathrm{pc}^{-3}$, $M_{BH} = 500\, m_\odot$, $m_* = m_\odot$, $v_c = 7\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, $r_* = r_\odot$, il numero di stelle nel cusp risulta $N \sim 188$.

Il modello di cusp che ci apprestiamo a descrivere è valido sotto le seguenti ipotesi (Lightman & Shapiro 1976 [57]).

1. Il BH di massa M_{BH} è sistuato al centro di un ammasso sfericamente simmetrico.

2. La massa del BH è molto minore della massa del core, ma maggiore della massa totale del cusp, ossia $M_c \gg M_{BH} \gg M_{cusp}$.

3. Il numero di stelle nel core è molto maggiore del numero di stelle nel cusp, ossia $N_c \gg N_{cusp}$.

3.5.2 Cattura mareale di stelle bound-unbound

Una stella con raggio caratteristico (cioè raggio orbitale medio) inferiore a r_t subisce cattura mareale da parte del BH e viene, generalmente, distrutta. Tuttavia possono essere catturate dal BH anche quelle stelle che, pur avendo energia totale grande (solo marginalmente legate al BH oppure addirittura unbound), hanno momento angolare sufficientemente basso da trovarsi entro r_t al pericentro. È questo il concetto fondamentale su cui si basa il modello del *loss cone*, suggerito per la prima volta da Frank & Rees (1976) [28] e sviluppato rigorosamente da Lightman & Shapiro (1976) [57]. Per "loss cone" si intende il cono nello spazio dei momenti angolari J definito da

$$J \leq J_{min}(E) = \left[2\left(E + \frac{GM_{BH}}{r_t}\right)\right]^{1/2} r_t \tag{3.17}$$

Per la relazione viriale($E \simeq -GM_{BH}/(2r_t)$), la (3.17) può essere approssimata come:

$$J \leq J_{min} \approx (G\, M_{BH}\, r_t)^{1/2} \tag{3.18}$$

Nel modello di Lightman & Shapiro [57] le stelle con energia E si distribuiscono:

- pressoché isotropicamente nello spazio delle velocità per momenti angolari compresi tra il valore più alto possibile $J_{max} = GM_{BH}/(2 \mid E \mid)^{1/2}$, corrispondente all'orbita circolare, e il valore definitorio del loss cone J_{min};
- con un certo gradiente per $J < J_{min}$, poichè la densità di stelle al diminuire del momento angolare diventa sempre più bassa a causa dell'aumento della probabilità di cattura da parte del BH.

Ci si aspetta che non tutte le stelle con momento angolare interno al loss cone vengano effettivamente catturate dal BH, ma solo quelle il cui momento angolare varia di poco nel corso di un periodo orbitale. Infatti quelle che, per l'alta frequenza e la violenza degli scattering con altre stelle, cambiano drasticamente il loro momento angolare nell'arco di un periodo orbitale, pur partendo da un J iniziale inferiore a J_{min}, potrebbero benissimo essere uscite dal loss cone al momento del loro transito al pericentro. Per quantificare questa osservazione, utilizziamo il formalismo costruito da Lightman & Shapiro.
Definiamo *tempo scala dinamico* il periodo orbitale di una stella:

$$t_d = P(E) = \frac{2\pi GM_{BH}}{(2 \mid E \mid)^{3/2}} \tag{3.19}$$

Esso rappresenta il tempo massimo in cui una stella può sopravvivere nel loss cone.
Definiamo inoltre j_2^2 come il valore quadratico medio del momento angolare trasferito a una stella in un periodo orbitale attraverso gli incontri stellari.
Definiamo, infine, il parametro adimensionale $q(E)$:

$$q(E) \equiv \frac{j_2^2}{J_{min}^2} \tag{3.20}$$

- Se $q(E) \ll 1$, il momento angolare scambiato nel corso di un periodo orbitale è molto più piccolo del momento angolare massimo interno al loss cone; quindi la stella ha buone probabilità di essere ancora nel loss cone al momento del suo transito al pericentro e di venire mangiata dal BH. In questo caso gli scattering con le altre stelle del cusp appaiono come un processo di diffusione.
- Se $q(E) \gg 1$, il momento angolare scambiato nel corso di un periodo orbitale è molto maggiore di J_{min}; quindi la stella ha buone probabilità di uscire dal loss cone prima di raggiungere il pericentro e fuggire. In questo caso gli scattering con le stelle del cusp sono processi violenti.

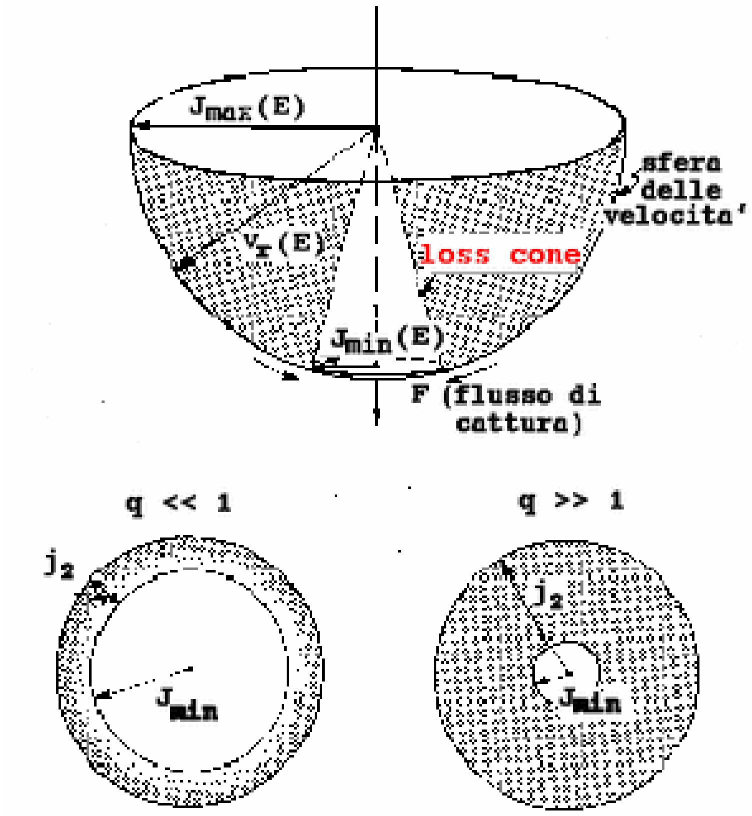


Figura 3.3: Rappresentazione del loss-cone nello spazio delle velocità (Lightman & Shapiro 1977).

La transizione tra i due regimi si ha per $q \sim 1$. Pertanto si definisce *energia critica*, E_{crit}, il valore dell'energia totale per cui $q = 1$.

Inoltre, come risulta dai calcoli di Lightman & Shapiro, E_{crit} è il valore dell'energia per cui è massimo il tasso di cattura $F_E(E)$, cioè il numero di stelle distrutte dal BH per unità di energia nell'unità di tempo.

Lightman & Shapiro calcolano anche una stima approssimata del tasso di cattura totale per le stelle bound e per le stelle unbound, che sono rispettivamente:

$$F_{bound} \sim F_{max}(E_a)\frac{r_{min}}{r_a}\frac{1}{ln(r_{min}/r_t)} \tag{3.21}$$

$$F_{unbound} \sim F_{max}(E_a) \left(\frac{r_{crit}}{r_a}\right)^3 ln(r_c/r_{crit}) \tag{3.22}$$

dove $r_{min} \equiv \min(r_a, r_{crit})$, mentre r_{crit} è definito da:

$$r_{crit} \simeq GM_{BH}/(\langle v_c^2 \rangle) \left[6.5 \ln\left(\frac{6M_{BH}}{11m_*}\right)\left(\frac{m_*}{M_{BH}}\right)^2 n_c\, r_a^3 \left(\frac{r_a}{r_t}\right)\right]$$

$F_{max}(E_a)$ si scrive come:

$$F_{max}(E_a) \sim (M_{BH}/(N_c m_*))^3 (GN_c m_*/r_c^3)^{1/2}$$

dove m_* è la massa caratteristica di una stella del core, N_c è il numero di stelle nel core e r_c il raggio del core.

Shapiro & Marchant (1978) [86] forniscono un'espressione analitica più precisa per il tasso di stelle unbound:

$$F_{unbound} = \pi^{3/2} \left(x_t^{-1} + \frac{1}{2} x_t^{-2}\right) P^* \tau_0 v_c^8 M_{BH}^{-3} n_c^{-1} \tag{3.23}$$

dove v_c è la velocità di dispersione nel core lungo la linea di vista, $x_t \equiv GM_{BH}/2r_t v_c^2$ è l'energia di legame al raggio mareale, adimensionalizzata con v_c^2, $P^* \equiv (8\sqrt{2}/3) n_c m_*^2 M_{BH} \ln \Lambda / v_c^6$ è il periodo orbitale adimensionalizzato, $\tau_0 \equiv (3/16)\pi v_c^3/(n_c m_*^2 \ln \Lambda)$ e $\ln \Lambda$ è il logaritmo coulombiano.
Gli stessi autori ricavano anche una stima numerica del tasso di stelle bound distrutte dal BH, ossia:

$$F_{bound} \approx 150 \frac{n_c r_a^3}{\tau_0 x_{crit} ln(x_t/(4x_{crit}))} \tag{3.24}$$

dove $x_{crit} \equiv GM_{BH}/(2r_{crit}v_c^2) \approx 5.7 \tilde{n}^{4/9} \tilde{v}^{-32/9} \tilde{r}^{-4/9} \tilde{m}^{28/27} (M_{BH}/10^3 m_\odot)^{20/27}$ con $\tilde{n} \equiv n_*/5 \cdot 10^4 \mathrm{pc}^{-3}$, $\tilde{v} \equiv v_*/10\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, $\tilde{m} \equiv (m_*/m_\odot)$, $\tilde{r} \equiv r_*/r_\odot$.

Catturando stelle con questi rate, il BH cresce in massa con un tasso di accrescimento che è (assumendo un'efficienza del 100%):

$$\dot{M} \approx mF \tag{3.25}$$

dove $F = F_{bound} + F_{unbound}$. Nelle simulazioni di Shapiro & Marchant questo si traduce in un aumento notevole della massa del BH durante l'evoluzione dell'ammasso. Ad esempio, un BH seme di $50\, m_\odot$, inserito nall'ammasso globulare al culmine del core collapse (assumendo una densità $n \sim 10^7 \mathrm{pc}^{-3}$), cresce in 2 tempi di rilassamento fino a $m \geq 10^3 m_\odot$. In realtà ci sono alcuni aspetti delle simulazioni di Shapiro & Marchant (effettuate con il metodo Monte Carlo descritto in Shapiro & Marchant 1978 [86] e Marchant & Shapiro 1979 [59]) che potrebbero apparire discutibili; come, ad esempio, la scelta di inserire ex abrupto il BH nella fase di core collapse, e non in una fase precedente.

3.5.3 Espulsione di stelle bound - unbound

Negli articoli di Shapiro su cui ci siamo basati per affrontare il problema della cattura mareale da parte del BH venivano completamente trascurati gli effetti degli incontri ravvicinati tra stelle. I primi ad occuparsi anche di questo aspetto sono stati Lin & Tremaine (1980) [58]. Dalla loro analisi emerge un risultato interessante: l'eiezione di stelle in seguito a incontri ravvicinati è una delle principali cause di perdita di massa dal core dell'ammasso. Infatti, in un modello di ammasso globulare con un IMBH centrale, l'espulsione di stelle in seguito ad incontri stretti con stelle del cusp risulta confrontabile con la fuga di stelle per evaporazione e assai più importante della perdita di stelle per cattura mareale da parte del BH.

Vediamo su quali argomenti si basa questa affermazione di Lin & Tremaine (d'ora in poi L&T). Prima, però, occorre precisare che essi si occupano soltanto di incontri coinvolgenti stelle bound. Per completezza, cercherò di aggiungere anche alcune considerazioni sul ruolo degli incontri tra stelle unbound.

Espulsione di stelle bound

Le stelle del cusp, soprattutto se con raggio caratteristico prossimo a r_a, possono venirne espulse come risultato di un incontro stretto con un'altra stella del cusp, mediato dalla presenza del BH centrale. In questo caso una delle due stelle acquista energia cinetica che la fa uscire dal cusp, mentre l'altra perde energia cinetica e guadagna energia di legame, scivolando sempre più vicino al BH. Se gli incontri si verificano nella buca di potenziale del BH, dove le stelle hanno velocità orbitali notevoli, allora l'espulsione può essere violenta: la maggior parte delle stelle eiettate lascerà non solo il cusp, ma il core e spesso persino l'ammasso globulare (nel Cap.6 vedremo che questa considerazione è in accordo con i risultati delle nostre simulazioni).
Da ora in poi, sulla scorta di L&T., considereremo solo quelle stelle che vengono espulse con velocità $v > v_{esc}$, dove v_{esc} è la velocità di fuga dall'ammasso. **Il tasso di espulsione di stelle bound**, calcolato utilizzando una formula ottenuta da Hénon (1969) [46], risulta:

$$\frac{\mathrm{d}N_{ej}}{\mathrm{d}t} = 110.4\frac{G^5 M_{BH}^3 \rho_c^2}{\sigma_c^9}\left(\frac{2\sigma_c^2}{v_{esc}^2}\right) \tag{3.26}$$

dove σ_c è la velocità di dispersione nel core lungo la linea di vista e ρ_c la densità di massa delle stelle nel core.
Utilizzando la definizione di raggio del core r_c, possiamo riscrivere la (3.26) come:

$$\frac{\mathrm{d}N_{ej}}{\mathrm{d}t} = 2.5\left(\frac{M_{BH}}{0.2M_c}\right)^3 \frac{(GM_c)^{1/2}}{r_c^{3/2}}\left(\frac{2\sigma_c^2}{v_c^2}\right) \tag{3.27}$$

dove M_c è la massa del core.

Ora che abbiamo il tasso di espulsione, possiamo confrontarlo con il tasso di evaporazione (ossia il numero di stelle fuggite dal core per evaporazione nell'unità di tempo) e con quello di cattura mareale (ossia il numero di stelle catturate e distrutte dal BH nell'unità di tempo).

Il tasso di evaporazione si può esprimere come (Spitzer & Chevalier 1973 [91]):

$$\frac{\mathrm{d}N_{evap}}{\mathrm{d}t} = 17\alpha \frac{(GM_{cluster})^{1/2}}{r_h^{3/2}} \ln\Lambda \tag{3.28}$$

dove $M_{cluster}$ è la massa totale dell'ammasso, r_h è il raggio che contiene metà della massa, α un parametro che dipende dal rapporto tra raggio mareale dell'ammasso e raggio del core e $\ln\Lambda \approx 10$. Confrontando $\frac{\mathrm{d}N_{ej}}{\mathrm{d}t}$ e $\frac{\mathrm{d}N_{evap}}{\mathrm{d}t}$, si trova:

$$\frac{\mathrm{d}N_{ej}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}N_{evap}/\mathrm{d}t} = f\left(\frac{M_{BH}}{0.2M_c}\right)^3 \tag{3.29}$$

dove $f = (0.015/\alpha)(M_c/M_{cluster})^{1/2}(r_h/r_c)^{3/2}(\sigma_c^2/v_c^2) \approx 0.1$.
Quindi il tasso di espulsione calcolato considerando le sole stelle bound è appena di un ordine di grandezza inferiore al tasso di evaporazione.

Il tasso di cattura mareale di stelle bound ricavato da Shapiro [85] può essere riscritto nella forma:

$$\frac{\mathrm{d}N_{cons}}{\mathrm{d}t} = [1.5\text{–}4.5]\times 10^{-7}\mathrm{yr}^{-1}\left(\frac{M_{BH}}{10^3 M_\odot}\right)^{61/27}\left(\frac{10\,\mathrm{km\,s^{-1}}}{\sigma}\right)^{21/9}\left(\frac{0.5\,\mathrm{pc}}{r_c}\right)^{28/9} \tag{3.30}$$

Per rendere più immediato il confronto, riscriviamo il tasso di eiezione nella forma:

$$\frac{\mathrm{d}N_{ej}}{\mathrm{d}t} = 1.6\times 10^{-6}\mathrm{yr}^{-1}\left(\frac{M_{BH}}{10^3 M_\odot}\right)^3\left(\frac{10\,\mathrm{km\,s^{-1}}}{\sigma}\right)^5\left(\frac{0.5\mathrm{pc}}{r_c}\right)^4\left(\frac{\sigma_c}{v_c}\right)^2 \tag{3.31}$$

Per questa scelta di parametri (selezionati da L&T), ponendo inoltre $r_t/r_c \approx 28$, $\sigma_c^2/v_c^2 \approx 0.07$, il tasso di cattura mareale è appena

$$\frac{\mathrm{d}N_{cons}}{\mathrm{d}t} \approx [0.3-0.7]\frac{\mathrm{d}N_{ej}}{\mathrm{d}t}$$

Abbiamo così verificato che il numero di stelle distrutte dal BH è inferiore al numero di stelle eiettate.

Come vedremo nel Cap.6, le nostre simulazioni sono in accordo con questi risultati analitici.

Espulsione di stelle unbound

L'eiezione di una stella unbound è il processo per cui una stella appartenente al core, ma non legata al BH, entra nel cusp, subisce un incontro stretto con (almeno) una stella del cusp e fuoriesce nuovamente dal cusp con energia cinetica (in media) superiore a quella iniziale. Questo lavoro di Tesi si occupa proprio di questo tipo di eventi.
Nella maggioranza dei casi la stella unbound acquisisce nello scattering una velocità di rinculo notevole, tale da essere espulsa dal core. Tuttavia potrebbe anche darsi che l'attrazione gravitazionale del BH la porti su un'orbita debolmente legata, sottraendo energia di legame alla stella del cusp coinvolta. Ritorneremo su entrambi i casi nel Cap.6.

3.5.4 Ionizzazione delle binarie

Fra gli autori che si sono occupati dello scenario BH+cusp nessuno si sofferma sulla possibilità che il BH ionizzi le binarie con cui interagisce. Tuttavia è intuitivo pensare che un oggetto con un enorme focalizzazione gravitazionale sia ingrado di alterare profondamente i parametri orbitali di una binaria. Questa considerazione è interessante soprattutto se si pensa alla bassa frazione di binarie ospitate dagli ammassi globulari. Per ulteriori dettagli, rimandiamo alla discussione delle nostre simulazioni (Cap.6).

3.5.5 Può il singolo BH arrestare il core collapse?

Come abbiamo appena visto, la presenza di un singolo IMBH può influenzare in molti modi l'evoluzione di un ammasso. In particolare alcuni dei fenomeni legati alla presenza del BH possono avere funzione di cooling o heating nei confronti del core, dove:

- per *heating* intendiamo l'immissione di energia cinetica-termica nel core, tendente a far espandere il core stesso;

- per *cooling* intendiamo la sottrazione di energia cinetica e l'aumento dell'energia di legame totale del core, tendente a farlo contrarre.

Mentre il cooling favorisce il core collapse, l'heating tende ad arrestarlo.

Può essere utile riassumere tutti i fenomeni indotti dall'IMBH fin qui visti, specificando, laddove è possibile, se la loro funzione è di cooling o di heating:

- cattura mareale di stelle bound $\longmapsto$ heating
- cattura mareale di stelle unbound $\longmapsto$ cooling (indirettamente heating)
- espulsione di stelle bound $\longmapsto$ heating
- espulsione di stelle unbound $\longmapsto$ cooling? heating?

Cerchiamo di spiegare più in dettaglio quello che abbiamo drasticamente riassunto in questo schema.

1.Cattura mareale di stelle bound & heating:

La cattura di stelle bound contribuisce almeno in due modi a riscaldare il core.
In primo luogo, come abbiamo visto nella sezione 3.5.3, il BH divora un gran numero di stelle, la cui energia è per lo più negativa (la cattura di stelle unbound dai conti di Shapiro [85] risulta meno importante della cattura di stelle bound). Quindi il BH elimina dal potenziale dell'ammasso proprio le stelle più legate, esercitando un effetto opposto rispetto a all'evaporazione (a causa della quale sono proprio le stelle con la maggior energia cinetica ad abbandonare l'ammasso). Questo tipo di riscaldamento potrebbe essere definito *riscaldamento gravitazionale*, in analogia con il processo descritto da Spitzer per le binarie (Cap.2, Sez.4).

Ma sopratutto, come sottolineano Shapiro & Marchant (1978) [86], la cattura mareale di stelle bound ha come conseguenza un flusso di energia dal cusp verso il core. Questa diffusione di energia verso l'esterno è dovuta agli incontri gravitazionali nel cusp, durante i quali alcune stelle cedono energia cinetica a stelle bound e unbound, scivolano su orbite sempre più vicine al BH e sono eventualmente inghiottite; mentre le altre stelle guadagnano energia e diffondono verso l'esterno. Sempre per analogia con il processo descritto da Spitzer per le binarie (Cap.2, Sez.4), questo tipo di riscaldamento potrebbe essere definito *riscaldamento cinetico*.
Il tasso di riscaldamento ("heating rate") è calcolato da Shapiro & Marchant a partire da:

$$\dot{E}_{cons} = -\int_{-GM_{BH}/(2r_t)}^{0} E F_E \mathrm{d}E \qquad (3.32)$$

2.Cattura mareale di stelle unbound & cooling:

La cattura mareale di stelle unbound implica soprattutto cooling. Infatti elimina dall'ammasso delle stelle "veloci". Tuttavia esso può avere anche effetti secondari di heating. Infatti, per essere inghiottita dal BH, una stella bound

dovrà prima aver fatto almeno uno scattering violento, in cui ha ceduto parte della sua energia termica a una stella bound.
Inoltre si ritiene che, almeno per un ammasso globulare, la distruzione mareale di stelle unbound sia un fenomeno di gran lunga più raro della distruzione di stelle bound. Infatti in un ammasso globulare il raggio critico, cioè la distanza dal BH a cui la probabilità di cattura è massima, è nettamente inferiore al raggio di influenza r_a. Quindi, poiché le stelle unbound passano la maggior parte, se non proprio la totalità del loro tempo al di fuori del raggio di influenza, la probabilità che esse vengano catturate e inghiottite è minima.
L'espressione analitica del cooling prodotto dalla cattura di stelle bound è fornita da Shapiro & Marchant [86]:

$$\dot{E}_{unbound} = \int_0^\infty E F_E \mathrm{d}E = \pi^{3/2}(x_t^{-1} + x_t^{-2}) P^* \tau_0 v_c^{10} M_{BH}^{-3} n_c^{-1} \tag{3.33}$$

dove i simboli impiegati sono gli stessi usati nelle equazioni 3.22-3.23.

3.Espulsione di stelle bound & heating

Il trasferimento di energia dovuto all'eiezione di stelle è ancor più difficile da stimare di quello dovuto alla cattura mareale. Innanzi tutto perché una stella può essere eiettata dal cusp e fermarsi nel core, oppure fermarsi nell'alone, ma anche essere eiettata completamente dall'ammasso. Il risultato in tutti i casi dovrebbe essere un heating; ma di entità ben diverse a seconda del destino della stella eiettata. Se la stella bound viene completamente espulsa dall'ammasso, dovrebbe esserci heating, dal momento che una stella legata è sottratta alla buca di potenziale. Tuttavia non bisogna dimenticare che, per essere eiettata, la stella bound deve aver acquistato energia cinetica da un'altra stella.
L&T cercano di dare una stima del tasso di riscaldamento dovuto all'espulsione di stelle bound dall'ammasso, moltiplicando il tasso di espulsione per l'energia cinetica minima acquistata da ciascuna stella eiettata ($=mv_{esc}^2/2$):

$$\frac{\mathrm{d}E_{ej}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} m v_{esc}^2 \frac{\mathrm{d}N_{ej}}{\mathrm{d}t} = 8\cdot 10^{-7}\mathrm{yr}^{-1} m\sigma_c^2 \left(\frac{M_{BH}}{10^3 M_\odot}\right)^3 \left(\frac{10\,\mathrm{km\,s^{-1}}}{\sigma_c}\right)^5 \left(\frac{0.5\,\mathrm{pc}}{r_c}\right)^4 \tag{3.34}$$

Per rendere più immediato il confronto, L&T esprimono il risultato ottenuto da Shapiro per l'heating dovuto a distruzione di stelle bound come:

$$\frac{\mathrm{d}E_{cons}}{\mathrm{d}t} = 5\cdot 10^{-6}\mathrm{yr}^{-1} m\sigma_c^2 \left(\frac{M_{BH}}{10^3 M_\odot}\right)^3 \left(\frac{10\,\mathrm{km/s}}{\sigma}\right)^5 \left(\frac{0.5\,\mathrm{pc}}{r_c}\right)^4 \tag{3.35}$$

Quindi, benché il tasso di espulsione sia superiore al tasso di cattura mareale, sembra che quest'ultimo processo sia circa 10 volte più efficace del primo nel fornire energia cinetica all'ammasso.

Anche L&T aggiungono che, tuttavia, un confronto rigoroso tra flusso di energia dovuto alle catture mareali e flusso di energia risultante dall'espulsione non è praticabile, dal momento che si tratta di due processi affatto diversi: il flusso di energia dovuto alla cattura è rilasciato prevalentemente alle stelle del core, mentre il flusso dovuto all'espulsione è depositato più o meno uniformemente in ogni regione dell'ammasso.

4.Espulsione di stelle unbound: cooling o heating?

Se la stella unbound, una volta uscita dal cusp, rimane nel core, depositando qui il suo eccesso di energia cinetica nell'arco di un tempo di rilassamento, questa può essere una fonte notevole di heating. Se, invece, la stella unbound viene espulsa fuori dal core, il risultato è un cooling; infatti la sua energia cinetica è sottratta al core, favorendo il core collapse. In questo senso, l'espulsione di stelle unbound è confrontabile all'evaporazione di stelle.

Conclusioni

Alla luce dello scenario fin qui delineato, siamo in grado di stabilire se l'IMBH favorisce o rallenta il core collapse?
Tutti gli autori (Lightman & Shapiro 1977 [85], Lin& Tremaine 1980 [58], Shapiro & Marchant 1978 [86]) sono concordi nel sostenere che, anche se vi sono alcuni processi dovuti all'IMBH che possono provocare cooling, l'effetto dominante è rappresentato dall'heating prodotto dalla cattura e dall'espulsione di stelle bound.

Quello su cui, invece, non c'è accordo in letteratura è la questione se il BH sia o no in grado di arrestare da solo il core collapse. Shapiro sostiene di sì, e porta come prove tanto i suoi conti semi-analitici, quanto i risultati delle simulazioni. Lin & Tremaine, invece, sono di tutt'altro avviso e ritengono non determinanti le simulazioni di Shapiro. Studi più recenti (Hills 1983 [49], Spitzer 1987 [92], Hut 1993 [53]) hanno evidenziato che le binarie hard, non necessariamente formate da buchi neri, forniscono al core l'energia sufficiente per arrestare il core collapse. Una conseguenza indiretta di tale scoperta è stato l'abbandono degli studi sul ruolo del singolo IMBH nell'arresto del core collapse.

3.6 BINARIA di BH

Purtroppo, per quanto riguarda lo scenario che prevede una binaria massiva di buchi neri, non si trovano in letteratura trattazioni così ricche come quelle citate a proposito del singolo IMBH. Possiamo far riferimento solo ad argomentazioni qualitative, come quelle di Sigurdsson & Hernquist (1993) [87], oppure rimandare il lettore ai risultati delle nostre simulazioni (Cap.6).

3.6.1 Una binaria di BH come esito più probabile dell'evoluzione dinamica

Tutti gli autori che si sono occupati recentemente dell'evoluzione dinamica di un giovane ammasso globulare (Hut 1993 [53], Sigurdsson & Hernquist 1993 [87], Portegies Zwart & McMillan 2002 [74]) concordano nell'affermare che, dopo la fase di interazioni violente tra BH, il core potrebbe ospitare un sistema binario (oppure triplo o quadruplo) di BH, molto massivo e molto hard, responsabile dell'espulsione di tutti gli altri buchi neri. Essendo l'ammasso ormai popolato in prevalenza da stelle "leggere" (stelle di sequenza principale con $\langle m \rangle \sim 0.5 m_\odot$, stelle di neutroni e nane bianche), nessuno degli oggetti che interagiscono gravitazionalmente con la binaria centrale dovrebbe riuscire a fornirgli una velocità di rinculo tale da eiettarla dal core (Sigurdsson & Hernquist 1993). La binaria, che, essendo di gran lunga più massiva degli altri oggetti, esercita una notevole focalizzazione gravitazionale (Cap.2, Sez.2.5), subirà un gran numero di scattering. Tali scattering restringono il suo semiasse maggiore con il tasso che è stato calcolato in Cap.2, Sez.2.7, eq.(2.43). Proprio qui si incontra un punto critico per distinguere tra BH binario e BH singolo:

ammesso pure che "originariamente" il BH sia binario, possono i continui scattering portarlo a coalescenza molto più rapidamente di quanto succederebbe se ci fossero solo le onde gravitazionali, facendo sì che lo stato finale sia sempre e comunque quello di un singolo IMBH?

Questa questione rimane effettivamente aperta. Da alcune considerazioni elementari (cfr. Cap.6, sez.2.5) emerge che binarie con masse in un range compreso tra $m_1 = 30\, m_\odot$, $m_2 = 3\, m_\odot$ e $m_1 = 200\, m_\odot$, $m_2 = 10\, m_\odot$ e con semiasse maggiore iniziale già molto stretto ($a_0 = 1$ A.U.) non dovrebbero coalescere prima di $10^9 - 10^{10}$ yr. Questo ci fa ritenere che una binaria di buchi neri possa sopravvivere fino ai tempi attuali al centro di un ammasso globulare.

Vediamo quali possono essere gli effetti di una binaria di BH sull'evoluzione dell'ammasso.

3.6.2 Espulsione di stelle

Sicuramente una binaria massiva di BH è molto efficace nell'eiettare stelle. In prima approssimazione le relazioni ricavate nel caso del singoloBH+cusp si possono estendere al caso della binaria di BH. Le uniche fondamentali differenze di cui dobbiamo tener conto sono le seguenti.

- Una binaria di BH non riesce a crearsi un vero e proprio cusp di stelle bound, a meno che la componente più massiva della binaria sia almeno di $100 - 200\,m_{\odot}$. Quindi gli eventi di scattering avranno luogo soprattutto con stelle unbound.

- Ci si aspetta che il tasso di cattura e distruzione mareale delle stelle di campo si riduca, perché la focalizzazione gravitazionale non solo è più piccola rispetto al caso BH+cusp, ma è anche ripartita tra i due BH con un effetto di reciproco annullamento.

Per altri particolari rimandiamo al Cap.6.

3.6.3 Ionizzazione di binarie

Sigurdsson & Hernquist (1993) [87], d'ora in poi S&H, suggeriscono che le binarie di BH possono incidere drammaticamente sulla frazione di binarie in un ammasso globulare. Come abbiamo già accennato (Cap.2, Sez.1.3), la frazione di binarie in un ammasso globulare sembra essere notevolmente inferiore alla media della Nostra Galassia ($f_{bin} \sim 10\%$ negli ammassi globulari, $f_{bin} \sim 50\%$ per la media della Via Lattea). Secondo S&H questa circostanza si spiega perfettamente con la presenza di una binaria di BH. Infatti le interazioni con altre stelle in un ambiente più denso della media galattica possono spiegare la distruzione delle binarie soft; ma, almeno negli ammassi poco densi (es. M 13), non sono sufficienti a giustificare una frazione così bassa di binarie. Invece una binaria di BH, con la sua focalizzazione gravitazionale, sarebbe più che sufficiente a spiegare la distruzione di un gran numero di binarie. I risultati delle nostre simulazioni confermano l'idea di S&H. Tuttavia S&H, restringendo volutamente la loro trattazione ai BH binari (o multipli) e trascurando il caso BH+cusp, tralasciano un particolare importante. Infatti nel caso di una binaria di BH la focalizzazione gravitazionale è grande; ma, quando è sufficientemente vicina, la binaria incoming risente dell'attrazione gravitazionale sia della componente più massiva sia, anche se in misura minore, della componente meno massiva della binaria di BH. Questi due effetti tendono a contrastarsi reciprocamente, permettendo alla binaria incoming di non finire troppo vicino all'uno o all'altro BH e preservandone quindi l'integrità. Invece nel caso di un singolo BH+cusp, il focusing gravitazionale dell'unico oggetto veramente massivo non trova alcun ostacolo, costringendo la binaria incoming ad un incontro molto stretto con il BH e portandola spesso a ionizzazione.

3.6.4 Può una binaria di BH arrestare il core collapse?

Come abbiamo visto nel Cap.2, i modelli teorici e le simulazioni più recenti (Spitzer 1987 [92], Hut 1993 [53]) individuano nelle binarie il principale fattore in grado di arrestare il core collapse. Invece l'idea del singolo BH pare accantonata.
Se un modello basato soltanto su binarie hard stellari è sufficiente a spiegare l'arresto del core collapse, a maggior ragione la presenza di una binaria di BH straordinariamente hard dovrebbe risolvere la questione. Probabilmente questo è uno dei punti che depongono maggiormente a sostegno dell'ipotesi di una binaria di BH.

3.7 BH singoli o binari?

In questa sezione non si pretende certo di risolvere il problema se l'oggetto centrale *eventualmente* presente nel core di alcuni ammassi globulari sia una binaria di BH o un singolo BH. Ci proponiamo semplicemente di riassumere analogie e differenze, vantaggi e svantaggi di questi due modelli.

SINGOLO BH

- ⋆ efficace nell'eiettare stelle;
- ⋆ molto efficace nello ionizzare binarie $\mapsto$ potrebbe essere preferibile in un ammasso globulare povero di binarie;
- ⋆ molto efficace nel catturare stelle;
- ⋆ incertezza sulla capacità di arrestare il core collapse.

BINARIA di BH

- ⋆ efficace nell'eiettare stelle;
- ⋆ abbastanza efficace efficace nello ionizzare binarie $\mapsto$ potrebbe essere preferibile in un ammasso globulare ricco di binarie;
- ⋆ efficace nel catturare stelle, solo se ha almeno una componente sufficientemente massiva;
- ⋆ efficace nell'arrestare il core collapse;
- ⋆ problema della possibile coalescenza $\mapsto$ la binaria si ridurrebbe a un singolo.

3.8 Random Walk del BH

Il random walk di un IMBH, singolo o binario, costituisce un punto chiave per capirne il ruolo nell'ammasso ed eventualmente per poterne rivelare la presenza. Infatti, quanto più l'IMBH riesce ad allontanarsi temporaneamente dal centro della buca di potenziale, tanto maggiori e "bizzarre" saranno le perturbazioni locali sul moto delle stelle dell'ammasso. Si capisce, quindi, perché questo aspetto abbia riscosso un relativo interesse in letteratura (Bahcall & Wolf 1976 [7], Merrit 2001 [64], Lin & Tremaine 1980 [58]). Cercheremo di dare un quadro globale del problema, senza entrare in questioni troppo dettagliate.

Lo spostamento quadratico medio di un IMBH in un ammasso globulare è determinato dalla compresenza di almeno quattro effetti:

1. gli *incontri distanti* con le stelle dell'ammasso, sia bound che unbound rispetto al BH;
2. gli *incontri stretti* con le stelle dell'ammasso, bound o unbound rispetto al BH;
3. la forza di richiamo esercitata dalla *buca di potenziale* dell'ammasso;
4. la *frizione dinamica* (che, tuttavia, è legata agli incontri distanti con le stelle dell'ammasso).

Analizziamo il ruolo di ciascuno di questi effetti.

3.8.1 Random Walk per incontri distanti

Sulla scorta dell'articolo di Lin& Tremaine [58], distinguiamo tra perturbazioni dovute a stelle del cusp e perturbazioni dovute a stelle unbound.

Interazioni distanti con stelle unbound

In un ammasso dove c'è equipartizione dell'energia tra il BH e le stelle del core, la probabilità che la posizione e la velocità del BH giacciano in un intervallo $\mathrm{d}\vec{r}_{BH}\mathrm{d}\vec{v}_{BH}$ è $p(\vec{r}_{BH}, \vec{v}_{BH})\mathrm{d}\vec{r}_{BH}\mathrm{d}\vec{v}_{BH} \propto \exp(-M_{BH}E/(m_*\sigma_*^2)\mathrm{d}\vec{r}_{BH}\mathrm{d}\vec{v}_{BH}$, dove $E = \frac{1}{2}v_{BH}^2 + \phi(r_{BH})$ è l'energia del BH per unità di massa. Il potenziale ϕ è il potenziale gravitazionale imperturbato del ammasso: $\phi(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho_* r^2$. Integrando su v_{BH}, troviamo la probabilità che la posizione del BH sia compresa in un volume $\mathrm{d}\vec{r}_{BH}$:

$$p(\vec{r}_{BH})\mathrm{d}\vec{r}_{BH} = \left(\frac{3m_*\sigma_*^2}{2M_{BH}G\rho_*}\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{2\pi M_{BH}G\rho_* r_{BH}^2}{3m_*\sigma_*^2}\right)\mathrm{d}\vec{r}_{BH} \quad (3.36)$$

La distribuzione di probabilità in termini di raggio proiettato R (dove $r \equiv \sqrt{R^2+z^2}$) è:

$$p(R)\mathrm{d}R = 4\pi R\mathrm{d}R\int_0^\infty p(R^2+z^2)^{1/2}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{4\pi M_{BH}G\rho_* R\mathrm{d}R}{3m_*\sigma_*^2}\exp\left(-\frac{2\pi M_{BH}G\rho_* R^2}{3m_*\sigma_*^2}\right) \tag{3.37}$$

Utilizzando la definizione di raggio del core, la relazione appena scritta diventa:

$$p(R)\mathrm{d}R = 3\frac{M_{BH}R\mathrm{d}R}{m_*r_c^2}\exp\left(-\frac{3M_{BH}R^2}{2m_*r_c^2}\right) \tag{3.38}$$

Da cui si ottiene lo spostamento medio (Lin & Tremaine 1980 [58], Bahcall & Wolf 1976 [7]):

$$\langle R\rangle = \left(\frac{\pi m_*}{6M_{BH}}\right)^{1/2} r_c = 0.01\mathrm{pc}\left(\frac{10^3 M_\odot}{M_{BH}}\right)^{1/2}\left(\frac{r_c}{0.5\,\mathrm{pc}}\right) \tag{3.39}$$

Interazioni distanti con stelle bound

Sulla scorta di L&T, consideriamo un sistema isolato costituito da un BH di massa M_{BH} e N_{cusp} stelle di massa m_*. La massa del cusp è $M_{cusp} = N_{cusp}m_*$ e la velocità stellare quadratica media relativa al centro di massa è $\langle v^2\rangle$. Servendoci di un argomento dovuto a Lynden Bell (1979) guardiamo il cusp come un unico oggetto che interagisce con il BH. Trattiamo il sistema a due corpi BH-cusp con il formalismo della particella ridotta. L'energia cinetica della particella ridotta, ossia l'energia cinetica relativa tra BH e cusp, è allora $K_{rel} = \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2$, dove $\mu = \frac{M_{cusp}M_{BH}}{(M_{cusp}+M_{BH})}$ e $v_{rel} = v_{BH}\frac{(M_{BH}+M_{cusp})}{M_{cusp}}$. Assumendo che ci sia equipartizione tra ciascuna stella del cusp e la particella ridotta, troviamo: $\mu\langle v_{rel}^2\rangle = m_*\langle v^2\rangle$. Da cui la velocità quadratica media acquisita dal BH per interazione con le stelle bound risulta:

$$\langle v_{BH}^2\rangle^{1/2} = \left[\frac{m_*^2 N_{cusp}}{M_{BH}(M_{BH}+M_{cusp})}\right]^{1/2}\langle v^2\rangle^{1/2} \tag{3.40}$$

Se, come è ragionevole assumere, $M_{BH} \gg M_{cusp}$, la (3.40) diventa:

$$\langle v_{BH}^2\rangle^{1/2} \simeq N^{1/2}\left(\frac{m_*}{M_{BH}}\right)\langle v^2\rangle^{1/2} \tag{3.41}$$

In modo analogo si può ricavare lo spostamento medio dovuto all'interazione con le stelle bound:

$$\langle r_{BH}^2\rangle^{1/2} = N_{cusp}^{1/2}\left(\frac{m_*}{M_{BH}}\right)\langle r^2\rangle^{1/2} \tag{3.42}$$

Se poniamo, per semplicità $\langle r^2\rangle^{1/2} = r_a \equiv GM_{BH}/\sigma_*^2$, e passiamo da r_{BH} al raggio proiettato R:

$$\langle R_{BH}^2\rangle^{1/2} \sim 3\cdot 10^{-4}\,\mathrm{pc}\left(\frac{M_{BH}}{10^3 M_\odot}\right)^{3/2}\left(\frac{10\,\mathrm{km/s}}{\sigma_*}\right)\left(\frac{0.5\ \mathrm{pc}}{r_c}\right) \tag{3.43}$$

Quindi lo spostamento medio del BH indotto dalle interazioni con le stelle del cusp è di gran lunga inferiore allo spostamento indotto dalle stelle unbound.

3.8.2 Random Walk indotto dagli incontri stretti

Lin & Tremaine sono stati i primi a tener conto anche dello spostamento acquisito dal BH in seguito agli scattering ravvicinati. In seguito a uno scattering tra il BH centrale e due stelle bound, di cui una viene espulsa dal cusp, anche il sistema BH + cusp + stella bersaglio che rimane legata al cusp acquista una certa velocità di rinculo, che, se $M_{cusp} \ll M_{BH}$, per la conservazione del momento lineare, sarà $v_h = -m_* v_{ej}/M_{BH}$ (dove m_* e v_{ej} sono rispettivamente la massa e la velocità della stella eiettata). Se i successivi scattering sono scorrelati, abbiamo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle v_{BH}^2\rangle = \left(\frac{2m_*^2}{M_{BH}^2}\right)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \tag{3.44}$$

dove $E = \frac{1}{2}v^2$ è l'energia per unità di massa della stella espulsa (considerando l'energia potenziale della stella eiettata trascurabile rispetto all'energia cinetica).
La variazione di energia $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ è stata calcolata da Lin & Tremaine utilizzando il modello analitico di Hénon (1969) [46]:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{2^{11/2}}{3}\frac{\pi^{3/2}G^5\rho_*^2 M_{BH}^3}{\sigma_*^7}Q \tag{3.45}$$

dove Q è un fattore adimensionale dell'ordine dell'unità.
Quindi la (3.44) risulta:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\langle v_{BH}^2\rangle = \frac{2^{13/2}\pi^{3/2}}{3}\frac{G^5\rho_*^2 M_{BH} m_*^2}{\sigma_*^7} \tag{3.46}$$

Come abbiamo detto al Cap.2, Sez.2.8, eq.(2.46), la frizione dinamica si esprime come:

$$\frac{\mathrm{d}v_{BH}}{\mathrm{d}t} = -2(2\pi)^{1/2}\frac{G^2\rho_* M_{BH} v_{BH}}{\sigma_*^3} \times 0.376 \tag{3.47}$$

All'equilibrio (se quest'equilibrio viene raggiunto), la velocità quadratica media del BH è:

$$\langle v_{BH}^2 \rangle = 25\frac{G^3\rho_* m_*^2}{\sigma_*^4} \tag{3.48}$$

Se il corispondente spostamento è $\langle r_{BH}^2 \rangle^{1/2} = \langle v_{BH}^2 \rangle^{1/2} t_{dyn}$, dove $t_{dyn} = (3/(4\pi G\rho_*))^{1/2}$, si trova:

$$\langle r_{BH}^2 \rangle^{1/2} = \left(\frac{3}{4\pi G\rho_*}\right)^{1/2} \langle v_{BH}^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{6}\left(\frac{Gm_*}{\sigma_*^2}\right) \tag{3.49}$$

Convertendo in spostamento proiettato:

$$\langle R_{BH}^2 \rangle^{1/2} = 1 \cdot 10^{-4}\mathrm{pc}\left(\frac{10\,\mathrm{km/s}}{\sigma_*}\right)^2 \tag{3.50}$$

Quindi anche il contributo degli scattering ravvicinati con stelle bound è trascurabile rispetto a quello delle interazioni distanti con stelle unbound.

In questo lavoro di Tesi ci proponiamo di ricavare dalle simulazioni la velocità quadratica media acquisita dal BH in seguito agli *incontri stretti con le stelle unbound*, ossia proprio il caso trascurato da Lin & Tremaine (si vedano i risultati al Cap.6, Sez.2.4).

3.8.3 Random Walk nel potenziale del cluster

Quando sia nota a priori la velocità quadratica media acquisita dal BH in seguito agli scattering con le stelle bound e unbound, può essere interessante calcolare la *distanza di massimo allontanamento del BH* dal centro dell'ammasso in presenza del potenziale del core. Ad esempio, assumendo che il potenziale nel core sia armonico ($\phi(r) = \frac{2\pi}{3}G\rho_c r_c^2$), dalla conservazione dell'energia ($E(r = 0) = E(r_{max})$, dove $r_{max} \equiv$ distanza di massimo allontanamento) segue:

$$\frac{1}{2}\langle v_{BH}^2 \rangle = \frac{2\pi}{3}G\rho_c r_{max}^2 \tag{3.51}$$

da cui ricaviamo che la distanza di massimo allontanamento è:

$$r_{max} = \sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho_c}} \langle v_{BH}^2 \rangle^{1/2} \tag{3.52}$$

Come vedremo, questa è una delle relazioni chiave per comprendere il ruolo di un eventuale IMBH in NGC 6752.

3.9 Le conferme osservative.

Dal punto di vista osservativo sono stati fatti molti tentativi per rivelare la presenza di un IMBH in un ammasso globulare.
Tuttavia nessuno di questi ha dato finora un risultato definitivo.

I metodi fin qui seguiti per cercare di rivelare la presenza di un IMBH in un ammasso globulare sono sostanzialmente di tre tipi.

1. Ricerca di emissioni X da una sorgente in accrescimento.
2. Studio della derivata del periodo delle pulsar a millisecondo che si trovano nelle regioni centrali di alcuni ammassi.
3. Misura della velocità di dispersione e di rotazione centrali.

Discutiamo brevemente questi tre metodi.

3.9.1 Emissioni X

Recentemente, in alcune galassie esterne, sono state osservate sorgenti X di luminosità tale da far pensare (nell'ipotesi di accrescimento con un tasso dell'ordine del tasso di Eddington) a buchi neri di massa intermedia (Colbert & Mushotzkhy 1999 [15]). In particolare, dati *Chandra* ad alta risoluzione mostrano la presenza di una sorgente X compatibile con un buco nero di $500 - 900\, m_\odot$ nella regione centrale della galassia M 82 (Matsumoto et al. 2001 [62], Kaaret et al. 2001 [54]). Tuttavia questa interpretazione è ancora discussa; così come non è certa l'associazione di questi oggetti con ammassi stellari.

3.9.2 Pulsar a millisecondo

Phinney (1993) [72] ha proposto l'uso delle pulsar a millisecondo per stabilire la massa centrale dell'ammasso globulare M 15. In M 15 ci sono 2 pulsar a millisecondo a distanza $R = 1.1''$ dal centro dell'ammasso con derivata del periodo rotazionale P negativa. Siccome le pulsar a millisecondo dovrebbero

avere $\dot{P} > 0$ per spin down intrinseco, un valore di $\dot{P} < 0$ si può spiegare con una perturbazione dovuta al campo gravitazionale. Questo pone un limite inferiore alla massa racchiusa entro il raggio proiettato $R \lesssim 1.1''$ di $M_{min}(1.1'') = 4.5 \cdot 10^3 M_\odot$. Combinato con il profilo di luce, questo valore ci dice che M/L_V cresce al decrescere della distanza dal centro. Purtroppo per M 15 questo metodo non permette di discriminare tra 1 singolo IMBH centrale e un insieme di residui stellari (”dark remnants”), ossia stelle di neutroni, BH di massa stellare e nane bianche pesanti, segregati al centro. Infatti le stime della ritenzione di stelle di neutroni ($\equiv$ la frazione di stelle di neutroni trattenute dall'ammasso nonostante il kick natale) e della popolazione di BH di massa stellare sono compatibili con la presenza di $4.5 \cdot 10^3\, m_\odot$ di tali oggetti al centro dell'ammasso globulare.
Come vedremo al Capitolo 4, questo metodo può essere applicato anche a NGC 6752.

3.9.3 Velocità di dispersione

La possibilità di realizzare spettri ad alta risoluzione offerta dallo STIS (Space Telescope Imaging Spectrograph) dell'HST (Hubble Space Telescope) ha permesso recentemente di misurare la velocità di dispersione in regioni prossime al centro per due ammassi globulari, il già citato M 15 e l'ammasso G 1 in Andromeda. Riassumiamo in breve i risultati e le implicazioni di queste osservazioni.

G 1 in M 31: ammasso globulare o dwarf distrutta?

Gebhardt et al. (2002) [35] hanno ricavato il profilo di velocità di G 1 dalle misure effettuate con lo STIS e, dal confronto con i modelli teorici (Gebhardt 2002) hanno trovato per la massa dell'oggetto centrale di questo ammasso un best fit di

$$M_{BH} = 2.0\,(+1.4, -0.8) \cdot 10^4 M_\odot$$

con un $M/L_V = 2.6$.
Essendo la velocità centrale di dispersione lungo la linea di vista pari a

$$\sigma = 25.1 \pm 1.7\,\mathrm{km\,s^{-1}}$$

l'oggetto centrale non luminoso giace, nel piano $\log M_{BH} - \log \sigma$, proprio sulla retta definita dalla $M - \sigma$ *relation* (cfr. App.A & Fig.3.4).
Quali sono le implicazioni di questa scoperta?

- Se G 1 è un vero ammasso globulare,
    - si tratta della prima scoperta (quasi) certa di un IMBH in un ammasso globulare;

  - gli IMBH al centro degli ammassi globulari non solo esistono, ma soddisfano la legge di correlazione tra la massa del buco nero centrale e la velocità di dispersione.

- Oppure G 1 non è un ammasso globulare, ma il nucleo di una galassia nana (tipo NGC 205) che sta per essere distrutta da M 31, e allora la scoperta sarebbe comunque importante, perché la $M - \sigma$ è stata verificata sinora solo per le giganti ellittiche e i bulge delle spirali, non per le nane ellittiche.
  Per altro ci sono molte motivazioni valide per considerare G 1 non un vero ammasso globulare, bensì una galassia nana, ossia:

  1. G 1 ha la più alta luminosità centrale tra tutti gli ammassi globulari delle galassie del Gruppo Locale;
  2. G 1 ha una brillanza superficiale centrale SB= 16.8 V mag arcsec^{-2}; mentre non esistono altri ammassi globulari con SB $>$ 14.5 V mag arcsec^{-2};
  3. ha una velocità di dispersione, $\sigma = 25\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, notevolmente più alta della media degli altri ammassi globulari ($\sim 10\,\mathrm{km\,s^{-1}}$), e simile, invece, a quella di NGC 205 ($\sim 30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$);
  4. Ferguson et al. (2002) [25] hanno scoperto un'altra nana che sta subendo la stessa sorte proprio vicino a G 1.

M 15: IMBH o dark remnants?

Analogamente a quanto fatto da Gebhardt et al. per G 1, Gerssen et al. (2002) [37] hanno realizzato spettri ad alta risoluzione spaziale della regione centrale di M 15, un ammasso globulare che ha subito core collapse e con alta densità centrale ($\gtrsim 10^6 \mathrm{pc}^{-3}$). Dall'analisi dei dati hanno trovato che:

- la velocità di dispersione σ cresce monotonicamente da $\sigma \sim 3\,\mathrm{km\,s^{-1}} \pm 1$ per $R = 7$ arcmin a $\sigma \sim 11\,\mathrm{km\,s^{-1}} \pm 1$ per $R = 24$ arcsec, e rimane costante fino a $R \sim 1''$;

- la velocità di rotazione proiettata è stranamente alta per un ammasso globulare: $v_{rot} \sim 10.4 \pm 2.7\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ per $R \leq 3.4''$.

Confrontando il profilo di σ e v_{rot} misurati con quelli predetti dai modelli teorici assunti, Gerssen et al. hanno trovato che il profilo osservato è compatibile solo con la presenza di una concentrazione centrale di materiale non luminoso.
Tale materiale non luminoso potrebbe essere costituito tanto da un singolo IMBH, quanto da un insieme di residui stellari (stelle di neutroni, nane

bianche e buchi neri di massa stellare). Per distinguere tra queste due possibilità, occorrerebbe una conoscenza più precisa della funzione iniziale di massa (IMF) e del tasso di ritenzione delle stelle di neutroni.
Compatibilmente con queste incertezze, il best fit per la massa del BH centrale è

$$M_{BH} = 1.7\,(+2.7, -1.7) \cdot 10^3 M_\odot$$

Anche in questo caso la massa dell'ipotetico IMBH sarebbe in accordo con la $M - \sigma\, relation$ (cfr. Fig.3.4).

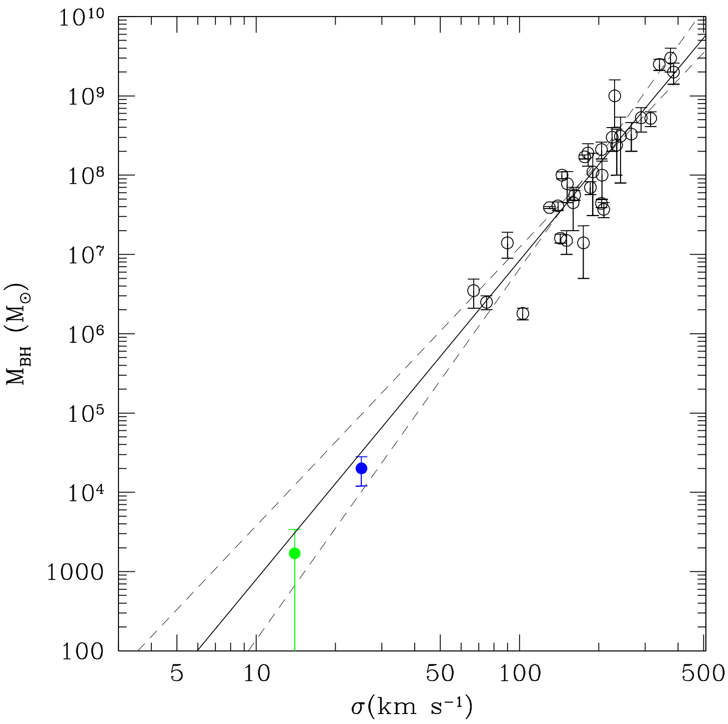


Figura 3.4: Il grafico riporta la posizione nel piano logM_{BH}-logσ dei buchi neri rivelati in nuclei galattici (*cerchi vuoti*) e dei due eventuali BH scoperti in G 1 (*cerchio blu*) e in M 15 (*cerchio verde*).

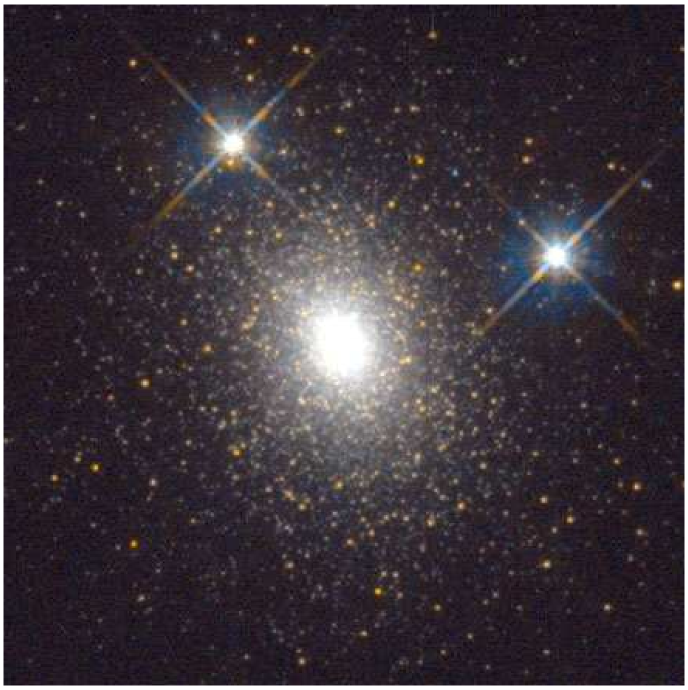


Figura 3.5: Immagine ottica dell'Ammasso G 1 in M 31 (ottenuta con la WFPC2 a bordo dell'Hubble Space Telescope).

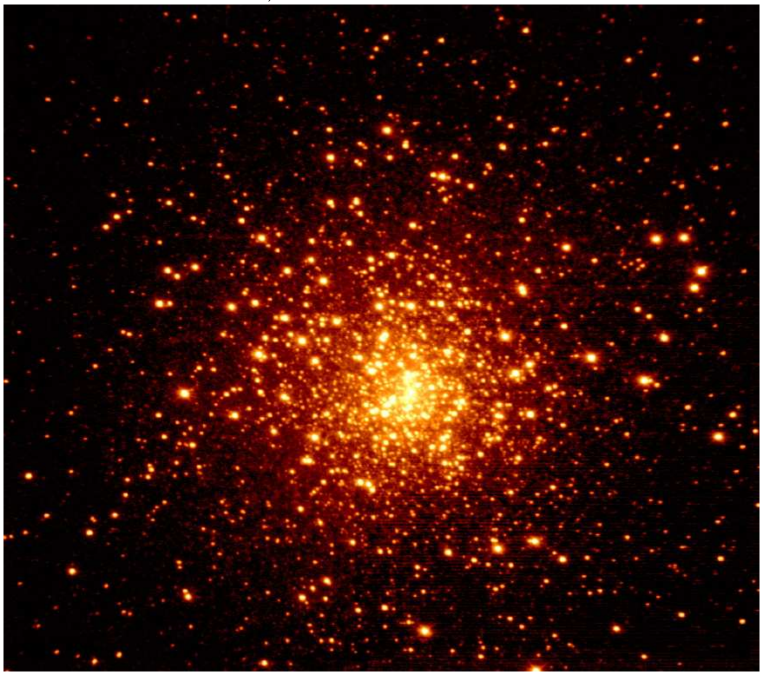


Figura 3.6: Immagine ottica dell'Ammasso M 15 (La Palma, Telescopio Nazionale Galileo).

Capitolo 4

NGC 6752 e la PSR J1911−5958A

In questo Capitolo verranno presentate le attuali conoscenze sull'ammasso globulare NGC 6752 (profilo di densità e brillanza superficiale, frazione di binarie...) e sulle 5 pulsar a millisecondo in esso rivelate (posizioni, informazioni ricavabili dall'analisi del periodo rotazionale e della sua derivata). Infine ci soffermeremo sull'unica pulsar a millisecondo binaria scoperta in NGC 6752, la PSR J1911−5958A, esaminando le interpretazioni suggerite per spiegare la sua posizione marcatamente periferica.

4.1 L'ammasso globulare NGC 6752

NGC 6752 è un ammasso globulare probabilmente nella fase di *post-core collapse* con evidenza di segregazione di massa (D'Amico et al. 2002 [17], Ferraro et al. 2003 [27]).
La sua distanza da noi è relativamente piccola ($\simeq$ 4.1 kpc). Il raggio del core è $\simeq 0.11$ pc. La sua metallicità è $[Fe/H] \simeq -1.56$, molto più bassa di quella solare, ma in linea con la metallicità media riscontrata negli ammassi globulari (cfr. Tabella 4.1).

4.1.1 Profilo di densità e di brillanza superficiale

Il centro di gravità (Fig.4.2), il profilo di densità radiale (Fig.4.3) e il profilo di brillanza superficiale (Fig.4.4) di NGC 6752 sono stati recentemente ricavati da Ferraro et al. [27] utilizzando la WFPC2-HST ad alta risoluzione.

La posizione del centro di gravità stimata da Ferraro et al. è a soli 1.9" dal baricentro delle 9 più interne sorgenti X osservate da *Chandra*, contrariamente a quanto risultava da precedenti misurazioni (Aurière e Ortolani 1989 [5], vedi Fig.4.2).

Figura 4.1: Immagine ottica di NGC 6752. LaSilla, Chile, European Southern Observatory, 30. Jul 2000

Ascensione Retta (J2000)	$19^{\mathrm{h}}\ 10^{\mathrm{m}}\ 52^{\mathrm{s}}$
Declinazione (J2000)	$-59°$ 58' 55"
Distanza dal Sole (kpc)	4.1(2)
Distanza dal Centro Galattico (kpc)	5.4
Altezza sul piano galattico (kpc)	-1.7
Raggio del core, r_c (arcmin)	0.17
Raggio di metà massa, r_h (arcmin)	2.34
Raggio mareale, r_{tid} (arcmin)	55.34
Metallicità media, $\log\left[\frac{\mathrm{Fe}}{\mathrm{H}}\right]$	-1.56

Tabella 4.1: Principali parametri fisici dell'Ammasso NGC 6752.

Il profilo di densità non può essere fittato utilizzando un unico modello di King. Il best-fit è ottenuto sovrapponendo 2 profili di King:

- uno per la zona più esterna ($r > 10''$) con r_c[1]$= 27''$ e c[2]$= 2.5$;

[1] Con r_c indichiamo il raggio del core

[2] c è l'indice di concentrazione, definito da:

$$c \equiv \log\left(r_{tid}/r_c\right)$$

dove r_c è il raggio del core e r_{tid} il raggio mareale, ossia il raggio a cui il potenziale galattico

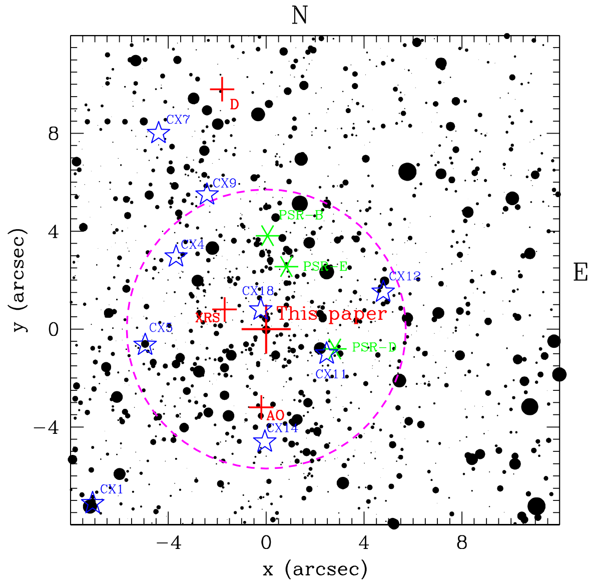


Figura 4.2: Posizione del centro di gravità di NGC 6752 ricavata da Ferraro et al. 2003 (*croce rossa grande*). Con AO è indicato il centro di gravità ricavato da Auriere & Ortolani (1989). Con XRS il centro delle 9 sorgenti X (indicate con le *stelle blu*) rivelate da Chandra).

- uno per la zona più interna ($r < 10''$) con $r_c = 5''$ e $c = 2.5$.

Questo fit con un *doppio King* non costituisce di per sé una stranezza, in quanto è già stato impiegato per altri ammassi, ad esempio 47 Tucanae.
La deviazione dal profilo di King è, inoltre, un'indicazione che le regioni più interne hanno conosciuto o stanno attraversando una fase di collasso. Infatti si ritiene che gli ammassi globulari nella fase post-core collapse (Cohn 1991 [14]) subiscano oscillazioni. Il core oscillante passa la maggior parte del tempo in prossimità del massimo, ed il valore del raggio del core osservato in NGC 6752 (0.11 pc) è consistente con il massimo raggio del core predetto dai modelli di *post-core collapse bounce*.

4.1.2 Le pulsar a millisecondo di NGC 6752

In NGC 6752 sono state recentemente scoperte (D'Amico et al. 2002 [17]) 5 pulsar a millisecondo, 4 delle quali isolate (PSR-B, PSR-C, PSR-D, PSR-E, in accordo con D'Amico et al. [17]) e una sola binaria (la PSR-A).

eguaglia il potenziale dell'ammasso globulare.

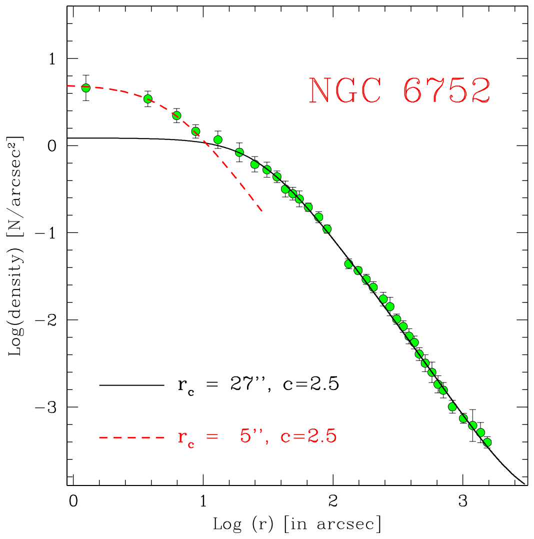


Figura 4.3: Profilo di densità di NGC 6752 fittato con un doppio King (Ferraro et al. 2003).

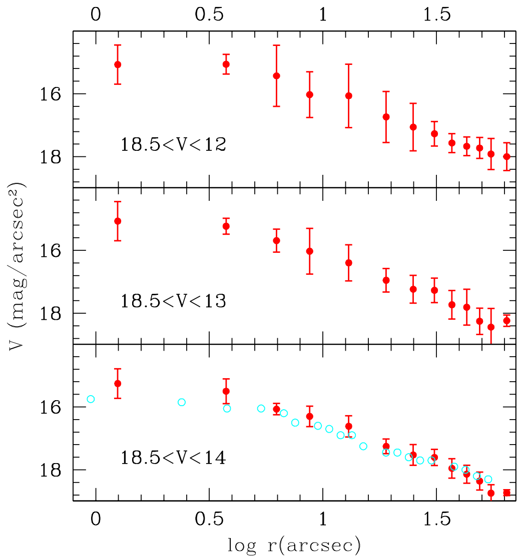


Figura 4.4: Profilo di brillanza superficiale di NGC 6752 (Ferraro et al. 2003).

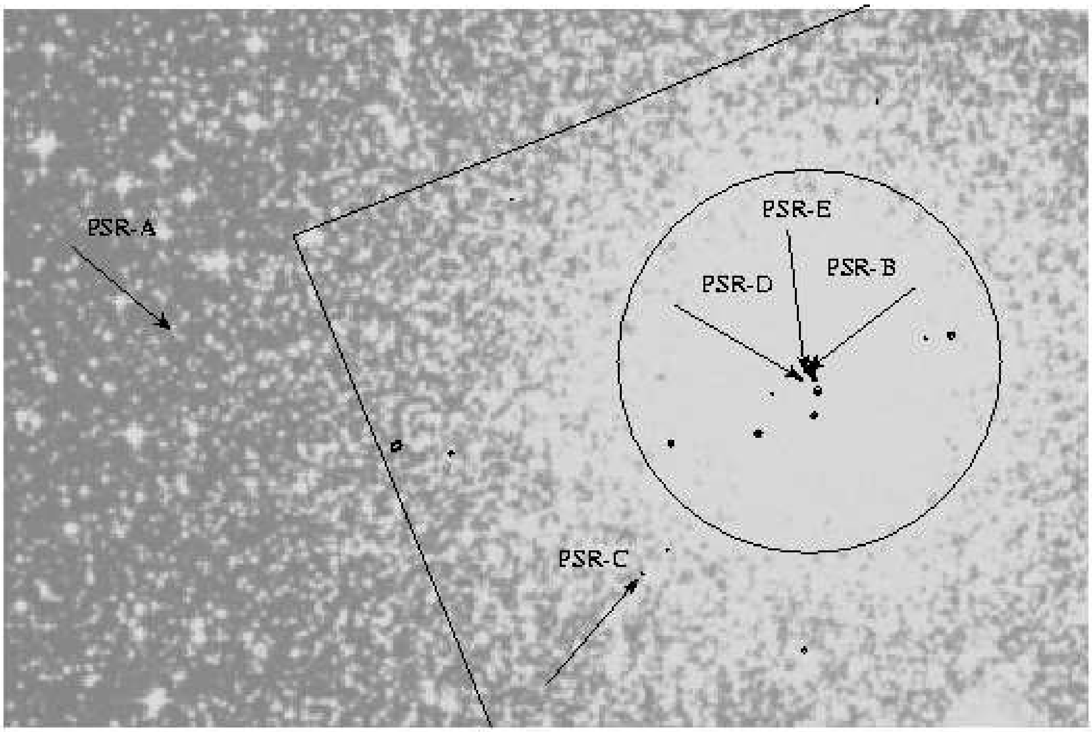


Figura 4.5: Posizione delle 5 pulsar a millisecondo (frecce) e delle sorgenti X (contorni neri) in NGC 6752, sovrapposte ad un'immagine ottica tratta dalla Digital Sky Survey. Il cerchio indica la regione compresa entro il raggio di metà massa. D'Amico et al. 2002

Pulsar	PSR-A	PSR-B	PSR-C	PSR-D	PSR-E
Nome	J1911−5958A	J1910−5959B	J1911−6000C	J1910−5959D	J1910−5959E
R.A. (J2000)	19 11 42 7562(2)	19 10 52 050(4)	19 11 05 5561(7)	19 10 52 417(2)	19 10 52 155(2)
Dec (J2000)	−59 58 26 900(2)	−59 59 00 83(3)	−60 00 59 680(7)	−59 59 05 45(2)	−59 59 02 09(2)
P (ms)	3.2661865707911(5)	8.35779850080(3)	5.277326932317(4)	9.03528524779(2)	4.571765939765(7)
$\dot{P}$	$3.07(10)\times10^{-21}$	$-7.99(5)\times10^{-19}$	$2.2(7)\times10^{-21}$	$9.63(3)\times10^{-19}$	$-4.37(1)\times10^{-19}$
DM ($cm^{-3}pc$)	33.68(1)	33.28(4)	33.21(4)	33.32(5)	33.29(5)
$P_{\rm orb}$ (d)	0.837113476(1)				
$a_{\rm p}\sin(i)/c$ (s)	1.206045(2)				
Eccentricità	$< 10^{-5}$				
$M_{\rm co}$ ($M_\odot$)	> 0.19				

Tabella 4.2: Parametri misurati per le pulsar a millisecondo di NGC 6752: Nome, Ascensione Retta (in ore, minuti, secondi), Declinazione (in gradi, minuti d'arco e secondi d'arco), Periodo rotazionale, derivata del Periodo rotazionale, Misura di Dispersione, Periodo orbitale, Semiasse maggiore proiettato, Eccentricità e Massa del compagno.

Di queste la PSR-B, la PSR-D e la PSR-E si trovano vicino al centro di gravità; mentre la PSR-A e la PSR-C sono le 2 MSPs più lontane dal centro dell'ammasso globulare ospite tra quelle finora scoperte. Indicando con r_h il raggio a metà massa dell'ammasso globulare e con r_c il raggio del core,

- la PSR-C si trova a $\sim 1.4 r_h \sim 24 r_c$;
- la PSR-A a $\sim 3.3 r_h \sim 57 r_c$ (la probabilità che sia una pulsar di campo è inferiore a 10^{-5}).

Questa posizione periferica della PSR-C e soprattutto della PSR-A è veramente insolita, se si considera che le MSPs, essendo tra gli oggetti più massivi di un ammasso globulare, tendono a segregare rapidamente verso il centro.

La PSR-B e la PSR-E hanno un valore di $\dot{P}$ negativo; mentre la PSR-A, la PSR-C e la PSR-D hanno $\dot{P} > 0$. Siccome le MSPs hanno $\dot{P}_{intrinseco} > 0$, dovuto al rallentamento per emissione di dipolo magnetico, un $\dot{P}$ negativo si può spiegare con:

1. accelerazione centrifuga (Shklovskii 1970);
2. rotazione differenziale galattica (Damour & Taylor 1991);
3. accelerazione verticale nel potenziale galattico (Kuijken & Gilmore 1989);
4. perturbazione esercitata da stelle vicine alle pulsar;

5. effetto della buca di potenziale dell'ammasso.

Siccome gli effetti 1, 2 e 3 risultano trascurabili per NGC 6752, le derivate negative possono essere conseguenza dell'interazione con stelle vicine o del potenziale dell'ammasso. Sulla scorta di Phinney (1993) [72] la probabilità che le accelerazioni della PSR-B e della PSR-E siano entrambe dovute a interazioni con stelle vicine è $\lesssim 10^{-4}$. Quindi l'ipotesi più ragionevole è che i $\dot{P}$ negativi siano dovuti alla buca di potenziale dell'ammasso.
La PSR-D, che si trova circa alla stessa distanza proiettata della PSR-B e della PSR-E, ha un valore di $\dot{P}$ positivo, ma molto elevato, difficile da attribuire al rallentamento intrinseco della pulsar. Un modo per spiegare le derivate delle tre pulsar è che la PSR-D si trovi tra l'osservatore e il centro dell'ammasso, la PSR-B e la PSR-E dalla parte opposta. Se questa interpretazione è corretta, si può stimare il $\dot{P}_{intrinseco}$ delle pulsar come la media pesata dei $\dot{P}_{osservati}$; infatti i termini, negativo per PSR-B e PSR-E, positivo per PSR-D, dovuti al campo gravitazionale, si elidono a vicenda e il residuo è proprio il $\dot{P}$ dovuto allo spin down:

$$\langle\frac{\dot{P}}{P}\rangle_{negativo} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\dot{P}}{P}\right)_B + \left(\frac{\dot{P}}{P}\right)_E\right] \simeq -9.56 \cdot 10^{-17}\mathrm{s}^{-1}$$

$$\langle\frac{\dot{P}}{P}\rangle_{positivo} = \left(\frac{\dot{P}}{P}\right)_D \simeq 1.07 \cdot 10^{-16}\mathrm{s}^{-1}$$

$$\langle\frac{\dot{P}}{P}\rangle_{intrinseco} = \frac{1}{2}\left[\langle\frac{\dot{P}}{P}\rangle_{negativo} + \langle\frac{\dot{P}}{P}\rangle_{positivo}\right] \simeq 5.5 \cdot 10^{-18}\mathrm{s}^{-1} \tag{4.1}$$

4.1.3 Un IMBH in NGC 6752?

Tramite una relazione ricavata da Phinney(1993) [72], dal valore di $\dot{P}/P$ si può calcolare un limite inferiore al rapporto M/L_V interno ad un certo angolo proiettato $\theta_\perp$:

$$|\frac{\dot{P}}{P}(\theta_\perp)| < |\frac{a_{max}}{c}(\theta_\perp)| \simeq 1.1\frac{G}{c}\frac{M_{cyl}(<\theta_\perp)}{\pi D^2\theta_\perp^2} = 5.1{\cdot}10^{-18}\frac{M}{L_V}\left(\frac{\Sigma(<\theta_\perp)}{10^4 L_{V\odot}\mathrm{pc}^{-2}}\right)\mathrm{s}^{-1} \tag{4.2}$$

dove $\Sigma(<\theta_\perp)$ è la brillanza superficiale media entro l'angolo proiettato $\theta_\perp$ e $M_{cyl}(<\theta_\perp)$ è la massa racchiusa nel volume cilindrico di raggio $R_\perp = D\theta_\perp$. Utilizzando la nuova determinazione del centro di gravità, il limite inferiore alla M/L_V che si ricava dal $\dot{P}/P$ delle MSPs (e in particolare della PSR-B, collocata a 0.08 pc dal centro) è

$$\frac{M}{L_V} \gtrsim 6 - 7$$

Tale valore implica l'esistenza di una concentrazione di $\gtrsim 3700 M_\odot$ di materia di bassa luminosità entro 0.08 pc dal centro dell'ammasso.
Sotto che forma si può trovare questa materia pressoché non luminosa?
Come si è detto a proposito di M 15, anche per NGC 6752 le ipotesi sono 2:

1. dark remnants;

2. singolo IMBH o binaria di BH;

L'ipotesi che si tratti solo di dark remnants (NS o WD) è in accordo con la funzione iniziale di massa (IMF) e con il fattore di ritenzione delle NS. Infatti:

- con una IMF di Salpeter ($\frac{dN}{dm} \propto m^{-\alpha}$, $\alpha = 2.35$) è necessario un fattore di ritenzione delle NS $\sim 20\%$, che sembra ragionevole;

- con una IMF più appiattita ($\alpha \sim 2.0$) basta un fattore di ritenzione $\sim 10\%$.

Viceversa, problemi con l'interpretazione dell'elevato valore di M/L_V come dovuto a WD o NS sorgono considerando la forma del profilo di densità di NGC 6752, che indica un core formato in prevalenza da stelle più leggere delle NS e delle WD (Fig 4.3).
Quindi anche per NGC 6752, come per M 15 (vedi Cap.3, Sez.9.3), sembrerebbe preferibile l'ipotesi di un BH singolo o binario.
Tuttavia ci sono anche altri aspetti che complicano ulteriormente il quadro, ossia:

- NGC 6752, contrariamente a M 15, ha evidenza di un core compatto;

- mentre in M 15 la dispersione di velocità continua a salire verso il centro (come ci si aspetterebbe per un BH centrale di $\sim 1000 M_\odot$), misure spettroscopiche di singole stelle mostrano per NGC 6752 un profilo di velocità di dispersione piatto ($\sigma \sim 6 - 7\,\mathrm{km\,s^{-1}}$) entro $1'$ (Xie 2003, in prep.). Tali misure suggeriscono $M/L \sim 2 - 3$.

Quindi, la dispersione di velocità di NGC 6752, benché il set di misure disponibili sia meno completo rispetto al caso di M 15, sembrerebbe escludere la presenza di un IMBH con massa $\gtrsim 1000 M_\odot$. Essa non esclude, tuttavia, la presenza di un BH, o meglio ancora una binaria di BH moderatamente massivi ($\sim 100 - 200 M_\odot$).

Tale BH non solo si concilia con la M/L_V, il profilo di densità centrale, la velocità di dispersione; ma potrebbe anche spiegare, agendo da perturbatore locale, il $\dot{P} < 0$ di PSR-B e PSR-E e la posizione periferica di PSR-A e PSR-C (Ferraro et al. 2003 [27]).

4.1.4 Le binarie di NGC 6752

Un'altra peculiarità di NGC 6752 è l'alta frazione di binarie f_{bin} (Rubenstein & Bailyn 1997 [83]):

- nel core la frazione di binarie è compresa tra il 15% e il 38%;
- nell'alone f_{bin} è sicuramente più bassa; ma è possibile soltanto stabilire un limite superiore: $f_{bin} \lesssim 16\%$.

Da questi valori Rubenstein & Bailyn traggono alcune interessanti considerazioni:

- La differenza tra la frazione di binarie nel core e nell'alone è probabilmente indizio di segregazione di massa; infatti, essendo la distanza interstellare media molto maggiore della separazione orbitale di una binaria hard, quest'ultima segrega come un oggetto di massa pari alla massa totale delle sue componenti;
- se la frazione di binarie è così alta, la dinamica nel core è dominata dagli incontri binaria - binaria;
- la massa di molte binarie è significativamente maggiore della massa di turn-off (m_t); ma la luminosità della maggior parte delle binarie è minore della luminosità di una stella con $m \sim m_t$. Pertanto le binarie costituiscono una popolazione, concentrata nel core, di oggetti con M/L_V più alto di quello delle stelle con $m \sim m_t$, che sono quelle che danno il maggior contributo al profilo di luce.

A queste considerazioni se ne potrebbero aggiungere altre 2:

- Anche la presenza di un gran numero di binarie tende ad escludere la presenza di un singolo BH con $m \gtrsim 1000\, m_\odot$, il quale sarebbe un efficiente distruttore di binarie. Invece, una binaria di BH moderatamente massiva è accettabile, visto che tende a ionizzare di meno le binarie che interagiscono con essa.

- Il fatto che le binarie sono piuttosto massive e in proporzione poco luminose è interessante ai fini di capire da cosa sono composte le $\sim 10^3$ masse solari di materia non luminosa presenti nelle regioni centrali.

4.2 La PSR-A

La PSR J1911-5958A (o più brevemente PSR-A) è l'unica pulsar a millisecondo binaria scoperta in NGC 6752. Essa si trova a $\sim 3.3r_h$ dal centro ed ha una compagna, probabilmente una nana bianca, di massa $m_{co} \sim 0.2m_\odot$. La PSR-A è a tutti gli effetti una pulsar a millisecondo canonica; come si può vedere dalle caratteristiche riportate nella seguente tabella.

P_{orb}	0.84 giorni
Eccentricità	$\lesssim 10^{-5}$
P_{spin}	3.27 ms
B	10^8 gauss

Per giustificare la sua posizione insolitamente lontana dal centro dell'ammasso, Colpi, Possenti & Gualandris (2002) [16], d'ora in poi CPG, hanno indagato 2 scenari.

1. La PSRA viene da una binaria primordiale nata nell'alone oppure espulsa dal core dell'ammasso in seguito al kick natale subito dalla NS.

2. La PSR-A è stata espulsa dal core per flyby o scambio con una stella dell'ammasso oppure per flyby con una binaria di BH (o un BH singolo+cusp).

4.2.1 Scenario 1: Binaria primordiale

La velocità di rinculo mediamente acquisita dalla stella di neutroni durante un'esplosione di supernova è $\gtrsim$ 60 km s^{-1}.
Quindi, se la velocità di fuga dall'ammasso ai tempi dell'esplosione di supernova era uguale a quella odierna ($\sim$ 35 km s^{-1}), il trattenimento della PSR-A nel ammasso risulta problematico. Inoltre:

- Se l'esplosione di supernova fosse avvenuta nelle regioni centrali, la stella di neutroni, quand'anche non fosse stata espulsa completamente dall'ammasso, sarebbe stata riportata nel core per frizione dinamica entro 1 Gyr, ed oggi non sarebbe più a 3.3 r_h.

- Se la supernova fosse avvenuta nell'alone, la stella di neutroni, per non essere espulsa dall'ammasso, avrebbe dovuto ricevere il kick più debole mai osservato (essendo la velocità di fuga dall'alone $\sim$ 10 $\mathrm{km\,s^{-1}}$), compatibile solo con uno scenario di AIC[3]. Per di più il numero di pulsar nate nell'alone di un ammasso globulare dovrebbe essere davvero esiguo (< 3 considerando tutti gli ammassi globulari galattici, si veda CPG), rendendo altamente improbabile la scoperta di un oggetto così "periferico" come la PSR-A.

4.2.2 Scenario 2: INCONTRO GRAVITAZIONALE

Lo scattering responsabile dell'espulsione della PSR-A potrebbe essersi verificato prima o dopo la fase di riciclaggio. E allora bisogna tener conto delle differenze tra lo scenario pre-riciclaggio e quello post-riciclaggio per quanto riguarda alcuni parametri, quali la massa della stella secondaria e il periodo orbitale del sistema.

Per quanto concerne la massa del compagno:

- prima del riciclaggio il compagno della PSR-A doveva avere massa $0.8\,m_\odot \lesssim m_{co} \lesssim 2\,m_\odot$;
- dopo il riciclaggio il compagno ha massa $m_{co} \sim 0.2\,m_\odot$.

Per quanto riguarda il periodo orbitale, mentre il suo valore attuale è 0.84 giorni, per stimare il P_{orb} pre-riciclaggio è necessario fare alcune considerazioni. Ricordiamo che esiste un valore P_{bif} del periodo orbitale (Pylyser & Savonije 1989 [79]) tale che:

- Se $P_{iniziale} > P_{bif}$, la binaria è una binaria divergente: evolve aumentando P_{orb} fino a formare una pulsar binaria a lungo periodo.
- Se $P_{iniziale} < P_{bif}$, la binaria è una binaria convergente: evolve riducendo P_{orb}, finché la stella che cede massa alla NS diventa degenere e si forma una binaria a breve periodo orbitale.

La PSR-A appartiene a quest'ultima categoria. Se $m_{co} \sim 1 - 2m_\odot$, P_{bif} è dell'ordine di $\sim 1-2$ giorni. Quindi la PSR-A doveva avere $P_{iniziale} < P_{bif} \sim 1 - 2$ giorni, ma $P_{iniziale} > P_{attuale} \simeq 0.84$ giorni.

Fatte queste premesse, analizziamo il caso di interazione con una stella dell'ammasso e quello di interazione con una binaria di BH.

[3] Il modello chiamato AIC, *accretion induced collapse*, prevede la formazione di una NS da una WD che, accrescendo materia da una stella compagna, finisce per superare la massa limite di Chandrasekhar.

Interazione con una stella:

Dobbiamo distinguere tra il caso di un flyby e quello di uno scambio.

Un *FLYBY* può essere avvenuto sia prima che dopo il riciclaggio, perché non altera significativamente l'eccentricità. Tuttavia, analizzando i risultati delle simulazioni di Phinney & Sigurdsson (1991) [71], CPG trovano che, affinché la velocità di rinculo fosse minore della velocità di fuga , il periodo orbitale al momento dello scattering doveva essere $P_{orb} \lesssim 0.4\,$giorni. Poiché oggi $P_{orb} \sim 0.84\,$giorni, risulta che $P_{iniziale} < P_{attuale}$, in contrasto con il fatto che la PSR-A è una binaria convergente. Dunque l'evento responsabile dell'espulsione della PSR-A non può essere uno scattering con una stella di campo, né pre-riciclaggio né post-riciclaggio.

Uno *SCAMBIO* potrebbe essere avvenuto solo pre-riciclaggio, poiché la binaria che si forma in seguito a scambio è solitamente molto eccentrica e il tempo di circolarizzazione tra due stelle compatte è proibitivamente lungo. Ma, anche in questo caso, CPG trovano che la binaria nata dallo scambio ha un periodo pre-riciclaggio troppo breve e soprattutto una probabilità molto bassa. Quindi neppure l'ipotesi dello scambio con una stella dell'ammasso globulare è plausibile.

Interazione con una binaria di BH o con un singolo IMBH + cusp:

Secondo CPG l'unica strada che rimane percorribile è quella di uno scattering con un oggetto più massivo delle stelle presenti nell'ammasso globulare: una binaria di BH oppure un BH singolo + cusp.

Assumiamo che NGC 6752 ospiti effettivamente un sistema di questo tipo (per le ipotesi sulla sua formazione rimaniamo al Capitolo 3). La domanda a cui questo lavoro di Tesi cerca di dare una risposta è:

può una binaria di BH (o un singolo BH + cusp) aver fornito alla PSR-A una velocità di 30 - 35 km s^{-1}, tale da eiettarla dal core ma non dall'ammasso globulare?

È, quindi, giunto il momento di discutere il metodo ed analizzare i risultati delle simulazioni effettuate.

Capitolo 5

Il codice 3-4 corpi

In questo Capitolo verranno illustrate le caratteristiche principali del nostro codice, realizzato per integrare il moto di un sistema isolato costituito da 3 o 4 masse puntiformi soggette alla forza newtoniana. In particolare descriveremo la formulazione delle equazioni del moto, il tipo di integratore usato, la scelta dei parametri iniziali, i criteri di adattamento del passo e la precisione dei risultati ottenuti. Una sezione sarà, inoltre, dedicata alla presentazione del codice Monte Carlo realizzato per generare le condizioni iniziali.

5.1 Equazioni del moto

Il codice realizzato in questo lavoro di Tesi permette di integrare il moto di un sistema isolato costituito da 3 o 4 masse puntiformi soggette alla sola forza di gravità newtoniana.

Le equazioni del moto di un oggetto puntiforme i di massa m_i in un sistema di N corpi, soggetto alla sola forza di gravità, scritte in forma vettoriale hanno la ben nota espressione:

$$\ddot{\vec{x}}_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \frac{Gm_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2} \tag{5.1}$$

dove $N = 3$ oppure $N = 4$ nel caso si tratti del codice a 3 o a 4 corpi.
Nel codice le equazioni sono state scritte in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} Gm_j \frac{(x_i-x_j)}{\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2\right]^{3/2}} \\ \ddot{y}_i &= -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} Gm_j \frac{(y_i-y_j)}{\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2\right]^{3/2}} \\ \ddot{z}_i &= -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} Gm_j \frac{(z_i-z_j)}{\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2\right]^{3/2}} \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2 Il codice a 3 corpi

L'integratore utilizzato nel nostro codice, tanto per i 3 quanto per i 4 corpi, è un *Runge-Kutta al IV ordine con ampiezza del passo variabile.*

Il codice è stato messo a punto seguendo le indicazini fornite, per un codice a 3 corpi, da Hut & Bahcall (1983) [52] e da Sigurdsson & Phinney (1993) [88].

5.2.1 Condizioni iniziali

I parametri iniziali sono stati scelti come suggerito da Hut & Bahcall (1983). Mentre le equazioni del moto sono quelle generali, valide per un qualsiasi sistema di tre punti interagenti gravitazionalmente, le condizioni iniziali sono scelte appositamente per un sistema costituito da una binaria e da un terzo oggetto posto "all'infinito", ovvero a una distanza iniziale molto maggiore della separazione orbitale della binaria.
Il sistema di riferimento scelto, sempre su indicazione di Hut & Bahcall, è quello del centro di massa iniziale della binaria.

I parametri iniziali sono indicati nella seguente tabella e rappresentati nella figura 5.1.

m_1, m_2, m_3	massa delle due componenti della binaria e della stella proiettile
e	eccentricità orbitale della binaria
a	semiasse maggiore iniziale della binaria
D	distanza iniziale della stella proiettile
b	parametro di impatto della stella proiettile
v	modulo della velocità iniziale della stella proiettile
ϕ	direzione di impatto
θ	direzione di impatto
ψ	orientazione di impatto
f	fase iniziale della binaria ($\equiv$ della particella ridotta)

Le condizioni iniziali possono essere espresse attraverso questi parametri nel seguente modo.

Parametrizzazione della binaria

Il moto della particella ridotta della binaria in coordinate polari $(r,\, f)$ è descritto dall'equazione delle coniche:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)} \tag{5.3}$$

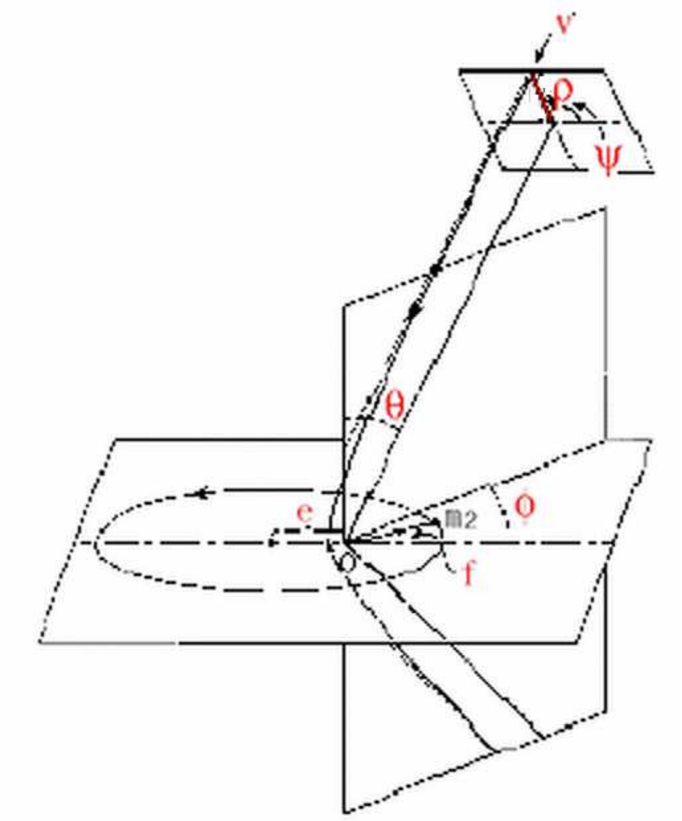


Figura 5.1: Parametri iniziali del codice a 3 corpi. Hut & Bahcall 1983, ApJ, 268, 319

dove a ed e sono rispettivamente il semiasse maggiore e l'eccentricità della binaria.

Per semplicità assumiamo che il piano iniziale dell'orbita della binaria coincida con il piano $(x,\, y)$. Allora, in coordinate cartesiane, il moto della particella ridotta è descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} x = r\cos f = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)}\cos f \\ y = r\sin f = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)}\sin f \\ z = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

Le corrispondenti componenti della velocità della particella ridotta in coordinate cartesiane saranno allora:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\frac{e\cos f}{(1+e\cos f)} - 1\right) \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)} \sin f \dot{f} \\ \dot{y} = \left(\frac{e\sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f\right) \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)} \dot{f} \\ z = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

La derivata della fase ($\dot{f}$) può essere espressa in funzione degli altri parametri iniziali utilizzando le seguenti relazioni.

$$\begin{cases} r = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)} \\ L^2 = G(m_1+m_2)(1-e^2)a \\ L = \dot{f}r^2 \end{cases} \tag{5.6}$$

dove L è il momento angolare specifico della particella ridotta. Combinando queste tre relazioni si trova:

$$\dot{f} = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a(1-e^2)}} \frac{(1+e\cos f)^2}{a(1-e^2)} \tag{5.7}$$

Sostituendo la relazione appena ricavata, possiamo riscrivere le componenti della velocità della particella ridotta:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\frac{e\cos f}{(1+e\cos f)} - 1\right) \sin f \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a(1-e^2)}}(1+e\cos f) \\ \dot{y} = \left(\frac{e\sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f\right) \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a(1-e^2)}}(1+e\cos f) \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

Adesso si può passare dalle equazioni per la particella ridotta alle equazioni per ciascuna delle due stelle della binaria, ricordando che:

$$\begin{cases} \vec{x}_{CM} \equiv \frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2}{m_1+m_2} \\ \vec{x}_{rid} \equiv (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \end{cases} \tag{5.9}$$

dove $\vec{x}_{rid}$ è il vettore posizione della particella ridotta, mentre $\vec{x}_{CM}$ è il vettore posizione del centro di massa. Poiché nel sistema di riferimento del centro di massa $\vec{x}_{CM} \equiv 0$ e $\dot{\vec{x}}_{CM} \equiv 0$, le equazioni per le due componenti della binaria risultano:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)} \frac{a(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)} \\ y_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)} \frac{a(1-e^2)\sin f}{(1+e\cos f)} \\ z_1 = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e\cos f}{(1+ecosf)} - 1 \right) \sin f \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a(1-e^2)}} (1+e\cos f) \\ \dot{y}_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e\sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f \right) \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a(1-e^2)}} (1+e\cos f) \\ \dot{z}_1 = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \frac{a(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)} \\ y_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \frac{a(1-e^2)\sin f}{(1+e\cos f)} \\ z_2 = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e\cos f}{(1+ecosf)} - 1 \right) \sin f \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a(1-e^2)}} (1+e\cos f) \\ \dot{y}_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e\sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f \right) \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a(1-e^2)}} (1+e\cos f) \\ \dot{z}_2 = 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

Parametrizzazione della stella proiettile

Se $\vec{x}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ e $\dot{\vec{x}}_3 = (\dot{x}_3, \dot{y}_3, \dot{z}_3)$ sono rispettivamente il vettore posizione e il vettore velocità della stella proiettile, i parametri D ($\equiv$ distanza iniziale della stella di campo) e v ($\equiv$ modulo della velocità della stella di campo) si scrivono immediatamente come:

$$D = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2} \qquad v = \sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2} \tag{5.14}$$

Segliamo adesso ϕ e θ tali che:

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = v\sin\theta\cos\phi \\ \dot{y}_3 = v\sin\theta\sin\phi \\ \dot{z}_3 = v\cos\theta \end{cases} \tag{5.15}$$

La traiettoria imperturbata della stella di campo (lungo una retta) è descritta dall'equazione:

$$\vec{r}_a(t) = \vec{r} + \vec{v}t \tag{5.16}$$

Dato il piano ortogonale alla velocità ($\vec{r}_a \cdot \vec{v} = 0$), la proiezione della retta $\vec{r}_a$ su tale piano è:

$$\vec{r}_a = \vec{r} + \vec{v}\left(-\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2} \right) \tag{5.17}$$

Per costruzione $\mid \vec{r}_a \mid\ = b$, il parametro di impatto.

Definisco un versore $\vec{w}$ sul piano ortogonale a $\vec{v}$, tale che:

$$\cos\psi = \frac{\vec{r}_a \cdot \vec{w}}{b} \tag{5.18}$$

Per costruzione $\vec{w}$ deve soddisfare la:

$$0 = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v}} = w_x \sin\theta \cos\phi + w_y \sin\theta \sin\phi + w_z \cos\theta \tag{5.19}$$

Ad esempio, una scelta di $\vec{w}$ che soddisfa l'equazione 5.19 è:

$$\vec{w} = (\sin\phi, -\cos\phi, 0) \tag{5.20}$$

Con questa scelta ottengo:

$$cos\psi = \frac{x_3 \sin\phi - y_3 \cos\phi}{b} \tag{5.21}$$

Scegliamo adesso due angoli α e β tali che:

$$\begin{cases} x_3 = D \sin\alpha \cos\beta \\ y_3 = D \sin\alpha \sin\beta \\ z_3 = D \cos\alpha \end{cases} \tag{5.22}$$

Per costruzione:

$$\begin{array}{l} \cos\alpha = -\cos\theta \sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} + \frac{b}{D} \sin\theta \sin\psi \\ \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \\ \sin(\phi - \beta) = \frac{b}{D} \frac{\cos\psi}{\sin\alpha} \\ \cos(\phi - \beta) = -\frac{1}{\sin\alpha} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} \sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\theta \sin\psi \right) \end{array} \tag{5.23}$$

Sfruttando una nota regola della trigonometria[1]:

$$\begin{array}{l} \cos\beta = \frac{1}{\sin\alpha} \left(\sin\phi \cos\psi \left(\frac{b}{D}\right) - \cos\phi \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} \sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\theta sin\psi \right) \right) \\ \sin\beta = \frac{1}{\sin\alpha} \left(-\sin\phi \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} \sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\theta sin\psi \right) - \left(\frac{b}{D}\right) \cos\phi \cos\psi \right) \end{array} \tag{5.24}$$

Adesso abbiamo tutte le informazioni necessarie per scrivere le condizioni iniziali della stella proiettile in funzione dei parametri scelti:

$$\begin{cases} x_3 = D \left(\sin\phi \cos\psi \left(\frac{b}{D}\right) - \cos\phi \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} \sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\theta sin\psi \right) \right) \\ y_3 = -D \left(\sin\phi \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} \sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\theta sin\psi \right) + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\phi \cos\psi \right) \\ z_3 = D \left(-\cos\theta \sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} + \left(\frac{b}{D}\right) \sin\theta \sin\psi \right) \end{cases} \tag{5.25}$$

[1] $\sin(\phi - \beta) = \sin\phi \cos\beta - \cos\phi \sin\beta \quad \cos(\phi - \beta) = \cos\phi \cos\beta + \sin\phi \sin\beta$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = v \sin\theta \cos\phi \\ \dot{y}_3 = v \sin\theta \sin\phi \\ \dot{z}_3 = v \cos\theta \end{cases} \tag{5.26}$$

Per comodità riportiamo uno specchietto riassuntivo delle relazioni che legano i parametri iniziali scelti alle posizioni e velocità delle tre stelle in coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)} \frac{a(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)} \\ y_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)} \frac{a(1-e^2)\sin f}{(1+e\cos f)} \\ z_1 = 0 \end{cases} \tag{5.27}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e\cos f}{(1+ecosf)} - 1\right) \sin f \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a(1-e^2)}}(1+e\cos f) \\ \dot{y}_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e\sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f\right) \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a(1-e^2)}}(1+e\cos f) \\ \dot{z}_1 = 0 \end{cases} \tag{5.28}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \frac{a(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)} \\ y_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \frac{a(1-e^2)\sin f}{(1+e\cos f)} \\ z_2 = 0 \end{cases} \tag{5.29}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e\cos f}{(1+ecosf)} - 1\right) \sin f \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a(1-e^2)}}(1+e\cos f) \\ \dot{y}_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e\sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f\right) \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a(1-e^2)}}(1+e\cos f) \\ \dot{z}_2 = 0 \end{cases} \tag{5.30}$$

$$\begin{cases} x_3 = D\left(\sin\phi\cos\psi\left(\frac{b}{D}\right) - \cos\phi\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2}\sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\theta sin\psi\right)\right) \\ y_3 = -D\left(\sin\phi\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2}\sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\theta sin\psi\right) + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\phi\cos\psi\right) \\ z_3 = D\left(-\cos\theta\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2} + \left(\frac{b}{D}\right)\sin\theta\sin\psi\right) \end{cases} \tag{5.31}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = v \sin\theta \cos\phi \\ \dot{y}_3 = v \sin\theta \sin\phi \\ \dot{z}_3 = v \cos\theta \end{cases} \tag{5.32}$$

5.2.2 Adimensionalizzazione delle equazioni

Anche nell'adimensionalizzazione delle equazioni prendiamo spunto da quanto viene suggerito da Hut & Bahcall (1983).

Definiamo:

$$\begin{array}{lll} x_i = x_{scal}\,\tilde{x}_i & y_i = y_{scal}\,\tilde{y}_i & z_i = z_{scal}\,\tilde{z}_i \\ m_i = m_{scal}\,\tilde{m}_i & t_i = t_{scal}\,\tilde{t} & \end{array}$$

Scegliamo una lunghezza scala, uguale per tutti gli assi cartesiani, pari al semiasse maggiore iniziale della binaria, e una massa scala pari alla massa totale della binaria:

$$a_{scal} \equiv a \qquad m_{scal} \equiv (m_1 + m_2)$$

Sostituendo questi valori, le equazioni 5.2 diventano:

$$\begin{array}{l} \frac{a_{scal}}{t_{scal}^2}\ddot{\tilde{x}}_i = \frac{Gm_{scal}}{a_{scal}^3}\left[-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{3}\tilde{m}_j\frac{(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)}{\left[(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)^2+(\tilde{y}_i-\tilde{y}_j)^2+(\tilde{z}_i-\tilde{z}_j)^2\right]^{3/2}}\right] \\ \frac{a_{scal}}{t_{scal}^2}\ddot{\tilde{y}}_i = \frac{Gm_{scal}}{a_{scal}^3}\left[-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{3}\tilde{m}_j\frac{(\tilde{y}_i-\tilde{y}_j)}{\left[(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)^2+(\tilde{y}_i-\tilde{y}_j)^2+(\tilde{z}_i-\tilde{z}_j)^2\right]^{3/2}}\right] \\ \frac{a_{scal}}{t_{scal}^2}\ddot{\tilde{z}}_i = \frac{Gm_{scal}}{a_{scal}^3}\left[-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{3}\tilde{m}_j\frac{(\tilde{z}_i-\tilde{z}_j)}{\left[(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)^2+(\tilde{y}_i-\tilde{y}_j)^2+(\tilde{z}_i-\tilde{z}_j)^2\right]^{3/2}}\right] \end{array} \tag{5.33}$$

Queste equazioni si riducono a:

$$\begin{array}{l} \ddot{\tilde{x}}_i = -\sum_{j=1,\,j\neq i}^{3}\tilde{m}_j\frac{(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)}{\left[(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)^2+(\tilde{y}_i-\tilde{y}_j)^2+(\tilde{z}_i-\tilde{z}_j)^2\right]^{3/2}} \\ \ddot{\tilde{y}}_i = -\sum_{j=1,\,j\neq i}^{3}\tilde{m}_j\frac{(\tilde{y}_i-\tilde{y}_j)}{\left[(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)^2+(\tilde{y}_i-\tilde{y}_j)^2+(\tilde{z}_i-\tilde{z}_j)^2\right]^{3/2}} \\ \ddot{\tilde{z}}_i = -\sum_{j=1,\,j\neq i}^{3}\tilde{m}_j\frac{(\tilde{z}_i-\tilde{z}_j)}{\left[(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)^2+(\tilde{y}_i-\tilde{y}_j)^2+(\tilde{z}_i-\tilde{z}_j)^2\right]^{3/2}} \end{array} \tag{5.34}$$

se e solo se:

$$t_{scal} = \sqrt{\frac{a_{scal}^3}{G\,m_{scal}}} \tag{5.35}$$

Riscriviamo adesso le condizioni iniziali ADIMENSIONALIZZANDOLE con queste lunghezze scala:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\frac{(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)} \\ y_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\frac{(1-e^2)\sin f}{(1+e\cos f)} \\ z_1 = 0 \end{array} \right. \tag{5.36}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e \cos f}{(1+ecosf)} - 1 \right) \sin f \frac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}} \\ \dot{y}_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e \sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f \right) \frac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}} \\ \dot{z}_1 = 0 \end{cases} \tag{5.37}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \frac{(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)} \\ y_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \frac{(1-e^2)\sin f}{(1+e\cos f)} \\ z_2 = 0 \end{cases} \tag{5.38}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e \cos f}{(1+ecosf)} - 1 \right) \sin f \frac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}} \\ \dot{y}_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \left(\frac{e \sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f \right) \frac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}} \\ \dot{z}_2 = 0 \end{cases} \tag{5.39}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{D}{a_{scal}} \left(\sin\phi \cos\psi \left(\frac{b}{D}\right) - \cos\phi \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} \sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\theta sin\psi \right) \right) \\ y_3 = -\frac{D}{a_{scal}} \left(\sin\phi \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} \sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\theta sin\psi \right) + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\phi \cos\psi \right) \\ z_3 = \frac{D}{a_{scal}} \left(-\cos\theta \sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} + \left(\frac{b}{D}\right) \sin\theta \sin\psi \right) \end{cases} \tag{5.40}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = v \sin\theta \cos\phi \left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}} \right) \\ \dot{y}_3 = v \sin\theta \sin\phi \left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}} \right) \\ \dot{z}_3 = v \cos\theta \left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}} \right) \end{cases} \tag{5.41}$$

5.3 Il codice a 4 corpi:

Il codice che integra le interazioni binaria - binaria, è semplicemente un'estensione del codice a 3-corpi. Infatti:

- le equazioni del moto sono le stesse, con l'unica differenza che $N = 4$;

- le condizioni iniziali si scrivono in modo analogo a quanto appena visto per i tre corpi, con l'unica, sostanziale differenza che quelli che prima erano il vettore posizione e il vettore velocità della stella proiettile, adesso rappresentano il vettore posizione e il vettore velocità del centro di massa della binaria proiettile.

Per parametrizzare i gradi di libertà interni della binaria proiettile abbiamo scelto (in modo analogo a quanto fatto per la binaria bersaglio) il semiasse maggiore iniziale (a_{pro}) la massa delle due componenti (m_3, m_4), l'eccentricità (e_{pro}) e la fase della particella ridotta (f_{pro}). Il nostro codice rappresenta, quindi, solo un caso particolare del problema dei 4-corpi, quello in cui i piani orbitali di entrambe le binarie coincidono con il piano (x, y).

Il sistema di riferimento scelto è quello del centro di massa della binaria bersaglio.

5.3.1 Condizioni iniziali

Come abbiamo già sottolineato, i parametri iniziali scelti per il sistema a 4 corpi sono tutti quelli già elencati per i 3 corpi più quelli che fissano i parametri orbitali della binaria proiettile:

m_1, m_2	massa delle due componenti della binaria bersaglio
e	eccentricità orbitale della binaria bersaglio
a	semiasse maggiore iniziale della binaria bersaglio
m_3, m_4	massa delle due componenti della binaria proiettile
e_{pro}	eccentricità orbitale della binaria proiettile
a_{pro}	semiasse maggiore iniziale della binaria proiettile
D	distanza iniziale del centro di massa della binaria proiettile
b	parametro di impatto del centro di massa della binaria proiettile
v	modulo della velocità iniziale del centro di massa della binaria proiettile
ϕ	direzione di impatto del centro di massa della binaria proiettile
θ	direzione di impatto del centro di massa della binaria proiettile
ψ	orientazione di impatto del centro di massa della binaria proiettile
f	fase iniziale della binaria bersaglio
f_{pro}	fase iniziale della binaria proiettile

Parametrizzazione della binaria bersaglio

La parametrizzazione della binaria bersaglio è assolutamente identica al caso delle interazioni binaria-singola stella (cfr. 5.10 - 5.11 - 5.12 - 5.13).

Parametrizzazione della binaria proiettile

La parametrizzazione della binaria proiettile si fa in modo del tutto analogo a quella della binaria bersaglio, con la sola differenza che il vettore posizione e il vettore velocità del centro di massa non sono nulli, bensì pari alle espressioni che abbiamo ricavato, nei tre corpi, per le condizioni iniziali della stella di campo.

Indicando con $\vec{x}_3$ e $\vec{x}_4$ i raggi vettori delle due componenti della binaria proiettile, dalla definizione di centro di massa e particella ridotta segue:

$$\begin{array}{ll} \vec{x}_3 = \vec{x}_{CM,pro} - \frac{m_4}{m_3+m_4}\vec{x}_{pro} & \vec{x}_4 = \vec{x}_{CM,pro} + \frac{m_3}{m_3+m_4}\vec{x}_{pro} \\ \dot{\vec{x}}_3 = \dot{\vec{x}}_{CM,pro} - \frac{m_4}{m_3+m_4}\dot{\vec{x}}_{pro} & \dot{\vec{x}}_4 = \dot{\vec{x}}_{CM,pro} + \frac{m_3}{m_3+m_4}\dot{\vec{x}}_{pro} \end{array} \tag{5.42}$$

dove $\vec{x}_{CM,pro}$ e $\vec{x}_{pro}$ sono rispettivamente il vettore posizione del centro di massa e della particella ridotta della binaria proiettile.

Dall'equazione delle coniche in coordinate polari (cfr. 5.3), le componenti della posizione e della velocità della particella ridotta risultano:

$$\begin{cases} x_{pro} = \frac{a_{pro}(1-e_{pro}^2)}{(1+e_{pro}\cos f_{pro})}\cos f_{pro} \\ y_{pro} = \frac{a_{pro}(1-e_{pro}^2)}{(1+e_{pro}\cos f_{pro})}\sin f_{pro} \\ z_{pro} = 0 \end{cases} \tag{5.43}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{pro} = \left(\frac{e_{pro}\cos f_{pro}}{(1+e_{pro}\cos f_{pro})} - 1\right)\sin f_{pro}\sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a_{pro}(1-e_{pro}^2)}}(1+e_{pro}\cos f_{pro}) \\ \dot{y}_{pro} = \left(\frac{e_{pro}\sin^2 f_{pro}}{(1+e_{pro}\cos f_{pro})} + \cos f_{pro}\right)\sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a_{pro}(1-e_{pro}^2)}}(1+e_{pro}\cos f_{pro}) \\ \dot{z}_{pro} = 0 \end{cases} \tag{5.44}$$

Sostituendo in $x_{CM,pro}$, $y_{CM,pro}$, $z_{CM,pro}$, $\dot{x}_{CM,pro}$, $\dot{y}_{CM,pro}$, $\dot{z}_{CM,pro}$ le relazioni trovate per la stella di campo (eq. 5.25 - 5.26), e utilizzando le equazioni 5.43 - 5.44, le condizioni iniziali per le due componenti della binaria proiettile si possono scrivere come:

$$\begin{cases} x_3 = D\left(\sin\phi\cos\psi\left(\frac{b}{D}\right) - \cos\phi\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2}\sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\theta sin\psi\right)\right) - \frac{m_4}{m_3+m_4}x_{pro} \\ y_3 = -D\left(\sin\phi\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2}\sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\theta sin\psi\right) + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\phi\cos\psi\right) - \frac{m_4}{m_3+m_4}y_{pro} \\ z_3 = D\left(-\cos\theta\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2} + \left(\frac{b}{D}\right)\sin\theta\sin\psi\right) \end{cases} \tag{5.45}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = v\sin\theta\cos\phi - \frac{m_4}{m_3+m_4}\dot{x}_{pro} \\ \dot{y}_3 = v\sin\theta\sin\phi - \frac{m_4}{m_3+m_4}\dot{y}_{pro} \\ \dot{z}_3 = v\cos\theta \end{cases} \tag{5.46}$$

$$\begin{cases} x_4 = D\left(\sin\phi\cos\psi\left(\frac{b}{D}\right) - \cos\phi\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2}\sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\theta sin\psi\right)\right) + \frac{m_3}{m_3+m_4}x_{pro} \\ y_4 = -D\left(\sin\phi\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2}\sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\theta sin\psi\right) + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\phi\cos\psi\right) + \frac{m_3}{m_3+m_4}y_{pro} \\ z_4 = D\left(-\cos\theta\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2} + \left(\frac{b}{D}\right)\sin\theta\sin\psi\right) \end{cases} \tag{5.47}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = v\sin\theta\cos\phi + \frac{m_3}{m_3+m_4}\dot{x}_{pro} \\ \dot{y}_4 = v\sin\theta\sin\phi + \frac{m_3}{m_3+m_4}\dot{y}_{pro} \\ \dot{z}_4 = v\cos\theta \end{cases} \tag{5.48}$$

5.3.2 Adimensionalizzazione delle equazioni

Per il codice a 4-corpi utilizziamo le stesse grandezze scala impiegate per il codice a 3-corpi, ossia il semiasse maggiore iniziale e la massa totale della binaria bersaglio. Quindi il tempo scala è quello indicato in 5.35.

Pertanto le condizioni iniziali adimensionalizzate sono:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\frac{(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)}\\
&y_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\frac{(1-e^2)\sin f}{(1+e\cos f)}\\
&z_1 = 0\\
&\dot{x}_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\left(\frac{e\cos f}{(1+ecosf)} - 1\right)\sin f\frac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}}\\
&\dot{y}_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\left(\frac{e\sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f\right)\frac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}}\\
&\dot{z}_1 = 0\\
&x_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\frac{(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)}\\
&y_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\frac{(1-e^2)\sin f}{(1+e\cos f)}\\
&z_2 = 0\\
&\dot{x}_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\left(\frac{e\cos f}{(1+ecosf)} - 1\right)\sin f\frac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}}\\
&\dot{y}_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\left(\frac{e\sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f\right)\frac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}}\\
&\dot{z}_2 = 0\\
&x_3 = \frac{D}{a_{scal}}\left(\sin\phi\cos\psi\left(\frac{b}{D}\right) - \cos\phi\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2}\sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\theta sin\psi\right)\right) - \frac{m_4}{m_3+m_4}\frac{x_{pro}}{a_{scal}}\\
&y_3 = -\frac{D}{a_{scal}}\left(\sin\phi\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2}\sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\theta sin\psi\right) + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\phi\cos\psi\right) - \frac{m_4}{m_3+m_4}\frac{y_{pro}}{a_{scal}}\\
&z_3 = \frac{D}{a_{scal}}\left(-\cos\theta\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2} + \left(\frac{b}{D}\right)\sin\theta\sin\psi\right)\\
&\dot{x}_3 = \left(v\sin\theta\cos\phi - \frac{m_4}{m_3+m_4}\dot{x}_{pro}\right)\left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}}\right)\\
&\dot{y}_3 = \left(v\sin\theta\sin\phi - \frac{m_4}{m_3+m_4}\dot{y}_{pro}\right)\left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}}\right)\\
&\dot{z}_3 = v\cos\theta\left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}}\right)\\
&x_4 = \frac{D}{a_{scal}}\left(\sin\phi\cos\psi\left(\frac{b}{D}\right) - \cos\phi\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2}\sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\theta sin\psi\right)\right) + \frac{m_3}{m_3+m_4}\frac{x_{pro}}{a_{scal}}\\
&y_4 = -\frac{D}{a_{scal}}\left(\sin\phi\left(\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2}\sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\theta sin\psi\right) + \left(\frac{b}{D}\right)\cos\phi\cos\psi\right) + \frac{m_3}{m_3+m_4}\frac{y_{pro}}{a_{scal}}\\
&z_4 = \frac{D}{a_{scal}}\left(-\cos\theta\sqrt{1-\left(\frac{b}{D}\right)^2} + \left(\frac{b}{D}\right)\sin\theta\sin\psi\right)\\
&\dot{x}_4 = \left(v\sin\theta\cos\phi + \frac{m_3}{m_3+m_4}\dot{x}_{pro}\right)\left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}}\right)\\
&\dot{y}_4 = \left(v\sin\theta\sin\phi + \frac{m_3}{m_3+m_4}\dot{y}_{pro}\right)\left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}}\right)\\
&\dot{z}_4 = v\cos\theta\left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}}\right)
\end{aligned}
\tag{5.49}
$$

dove:

$$
\begin{aligned}
x_{pro} &= \tfrac{a_{pro}(1-e_{pro}^2)}{(1+e_{pro}\cos f_{pro})}\cos f_{pro}\\
y_{pro} &= \tfrac{a_{pro}(1-e_{pro}^2)}{(1+e_{pro}\cos f_{pro})}\sin f_{pro}\\
\dot{x}_{pro} &= \left(\tfrac{e_{pro}\cos f_{pro}}{(1+e_{pro}\cos f_{pro})}-1\right)\sin f_{pro}\sqrt{\tfrac{G(m_1+m_2)}{a_{pro}(1-e_{pro}^2)}}(1+e_{pro}\cos f_{pro})\\
\dot{y}_{pro} &= \left(\tfrac{e_{pro}\sin^2 f_{pro}}{(1+e_{pro}\cos f_{pro})}+\cos f_{pro}\right)\sqrt{\tfrac{G(m_1+m_2)}{a_{pro}(1-e_{pro}^2)}}(1+e_{pro}\cos f_{pro})
\end{aligned}
$$

5.3.3 Le tre parti del codice

Nella pratica il codice 4-corpi non è stato utilizzato esattamente come fin qui descritto. Infatti, avendo a che fare con una binaria bersaglio particolarmente hard, e quindi capace di fare sentire i suoi effetti sulla binaria di campo anche molto lontano, è necessario cominciare e terminare l'integrazione quando la binaria di campo si trova a grandi distanze dal centro di massa della binaria bersaglio. In generale abbiamo scelto di cominciare e terminare l'integrazione quando la binaria di campo si trova al raggio di accrescimento del BH. Per quei sistemi per cui questo era proibitivamente grande, abbiamo scelto una distanza iniziale-finale $D = 1000$ A.U. (pari alla separazione interstellare media nel core di un ammasso globulare). Utilizzare il codice a 4-corpi per integrare su una distanza così grande ($\gtrsim 1000\, a_{scal}$) comporta una proibitiva dilatazione dei tempi di integrazione.

La questione si può risolvere facilmente nel seguente modo. Quando le due binarie sono sufficientemente lontane tra di loro da interagire gravitazionalmente, ma senza alterare i reciproci parametri orbitali, il sistema può essere approssimato con un sistema di due corpi puntiformi, ciascuno di massa pari alla massa totale di una delle due binarie ed avente per vettore posizione e vettore velocità il vettore posizione e il vettore velocità del centro di massa di tale binaria. Quindi, a grandi distanze prima e dopo lo scattering, il sistema a 4 corpi può essere integrato come un sistema a 2 corpi, senza sostanziali differenze.
Pertanto, per integrare uno scattering binaria - binaria, abbiamo impiegato il seguente metodo:

- dal momento in cui la distanza D tra i centri di massa delle due binarie è pari al raggio di influenza della binaria bersaglio fino a quando $D = 40\, a_{scal}$, il sistema è stato integrato con un codice a 2-corpi, nell'approssimazione in cui ciascuna binaria è un punto (coincidente con il centro di massa) di massa pari alla sua massa totale;

- dal momento in cui $D = 40\, a_{scal}$ fino a quando, dopo lo scattering, i centri di massa delle due binarie si sono allonanati di nuovo a $D = 60\, a_{scal}$, il sistema viene integrato con il codice a 4 corpi;

- dal momento in cui $D = 60\, a_{scal}$ finché la distanza è tornata ad essere pari al raggio di influenza, il sistema viene integrato ancora con il codice a 2 corpi, per conoscere con precisione la velocità di rinculo della binaria outcoming.

I valori $D = 40\, a_{scal}$ e $D = 60\, a_{scal}$ sono stati scelti arbitrariamente; tuttavia rispecchiano con buona approssimazione il valore della distanza per cui l'interazione gravitazionale tra i centri di massa delle due binarie è trascurabile rispetto all'energia cinetica della binaria proiettile dopo lo scattering.

Questo metodo "$2-4-2$ corpi" non è completamente nuovo; infatti Hills (1975) [47], Phinney & Sigurdsson (1993) [88] e Quinlan (1996) [80] seguono un procedimento analogo ($2-3-2$ corpi) per gli scattering binaria-singola.

Se il codice si compone di tre parti, avremo anche tre set diversi di condizioni iniziali, che andiamo ora ad illustrare.

Condizioni iniziali:

Indichiamo con $\vec{x}_{CM,bers}$ e $\vec{x}_{CM,pro}$ i centri di massa rispettivamente della binaria bersaglio e della binaria proiettile.

- Per $r_a \geq \mid \vec{x}_{CM,pro} - \vec{x}_{CM,bers} \mid \geq 40 a_{scal}$ le condizioni iniziali (già adimensionalizzate) sono:

$$\begin{array}{ll} x_{CM,bers} = 0; & \dot{x}_{CM,bers} = 0; \\ y_{CM,bers} = 0; & \dot{y}_{CM,bers} = 0; \\ z_{CM,bers} = 0; & \dot{z}_{CM,bers} = 0; \end{array} \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned} x_{CM,pro} &= \frac{D}{a_{scal}} \left(\sin\phi \cos\psi \left(\frac{b}{D}\right) - \cos\phi \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} \sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\theta sin\psi \right) \right) \\ y_{CM,pro} &= -\frac{D}{a_{scal}} \left(\sin\phi \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} \sin\theta + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\theta sin\psi \right) + \left(\frac{b}{D}\right) \cos\phi \cos\psi \right) \\ z_{CM,pro} &= \frac{D}{a_{scal}} \left(-\cos\theta \sqrt{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2} + \left(\frac{b}{D}\right) \sin\theta \sin\psi \right) \end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{CM,pro} &= v \sin\theta \cos\phi \left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}}\right) \\ \dot{y}_{CM,pro} &= v \sin\theta \sin\phi \left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}}\right) \\ \dot{z}_{CM,pro} &= v \cos\theta \left(\frac{t_{scal}}{a_{scal}}\right) \end{aligned} \tag{5.52}$$

Indichiamo con $\vec{x}_{CM,bers,40a}$ e $\vec{x}_{CM,pro,40a}$ i vettori posizione adimensionalizzati dei centri di massa rispettivamente della binaria bersaglio e della binaria proiettile alla fine della prima integrazione a 2-corpi.

- Per $40a_{scal} \geq \mid \vec{x}_{CM,pro} - \vec{x}_{CM,bers} \mid \geq 60a_{scal}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{CM,bers,40a} - \tfrac{m_2}{(m_1+m_2)} \tfrac{(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)} \\ y_1 &= y_{CM,bers,40a} - \tfrac{m_2}{(m_1+m_2)} \tfrac{(1-e^2)\sin f}{(1+e\cos f)} \\ z_1 &= z_{CM,bers,40a} \end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_{CM,bers,40a} - \tfrac{m_2}{(m_1+m_2)} \left(\tfrac{e\cos f}{(1+ecosf)} - 1 \right) \sin f \tfrac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}} \\ \dot{y}_1 &= \dot{y}_{CM,bers,40a} - \tfrac{m_2}{(m_1+m_2)} \left(\tfrac{e\sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f \right) \tfrac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}} \\ \dot{z}_1 &= \dot{z}_{CM,bers,40a} \end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_{CM,bers,40a} + \tfrac{m_1}{(m_1+m_2)} \tfrac{(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)} \\ y_2 &= y_{CM,bers,40a} + \tfrac{m_1}{(m_1+m_2)} \tfrac{(1-e^2)\sin f}{(1+e\cos f)} \\ z_2 &= z_{CM,bers,40a} \end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{x}_{CM,bers,40a} + \tfrac{m_1}{(m_1+m_2)} \left(\tfrac{e\cos f}{(1+ecosf)} - 1 \right) \sin f \tfrac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}} \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_{CM,bers,40a} + \tfrac{m_1}{(m_1+m_2)} \left(\tfrac{e\sin^2 f}{(1+e\cos f)} + \cos f \right) \tfrac{(1+e\cos f)}{\sqrt{(1-e^2)}} \\ \dot{z}_2 &= \dot{z}_{CM,bers,40a} \end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_{CM,pro,40a} - \tfrac{m_4}{m_3+m_4} \tfrac{x_{pro}}{a_{scal}} \\ y_3 &= y_{CM,pro,40a} - \tfrac{m_4}{m_3+m_4} \tfrac{y_{pro}}{a_{scal}} \\ z_3 &= z_{CM,pro,40a} \end{aligned} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \dot{x}_{CM,pro,40a} - \tfrac{m_4}{m_3+m_4} \dot{x}_{pro} \left(\tfrac{t_{scal}}{a_{scal}} \right) \\ \dot{y}_3 &= \dot{y}_{CM,pro,40a} - \tfrac{m_4}{m_3+m_4} \dot{y}_{pro} \left(\tfrac{t_{scal}}{a_{scal}} \right) \\ \dot{z}_3 &= \dot{z}_{CM,pro,40a} \end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= x_{CM,pro,40a} + \tfrac{m_3}{m_3+m_4} \tfrac{x_{pro}}{a_{scal}} \\ y_4 &= y_{CM,pro,40a} + \tfrac{m_3}{m_3+m_4} \tfrac{y_{pro}}{a_{scal}} \\ z_4 &= z_{CM,pro,40a} \end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \dot{x}_{CM,pro,40a} + \tfrac{m_3}{m_3+m_4} \dot{x}_{pro} \left(\tfrac{t_{scal}}{a_{scal}} \right) \\ \dot{y}_4 &= \dot{y}_{CM,pro,40a} + \tfrac{m_3}{m_3+m_4} \dot{y}_{pro} \left(\tfrac{t_{scal}}{a_{scal}} \right) \\ \dot{z}_4 &= \dot{z}_{CM,pro,40a} \end{aligned} \tag{5.60}$$

dove con i pedici 1 e 2 indichiamo le due componenti della binaria-bersaglio, con i pedici 3 e 4 le due componenti della binaria proiettile.

- Per $60a_{scal} \geq \mid \vec{x}_{CM,pro} - \vec{x}_{CM,bers} \mid \geq r_a$:

$$\begin{array}{ll} x_{CM,bers} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} & \dot{x}_{CM,bers} = \frac{m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2}{m_1+m_2} \\ y_{CM,bers} = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2} & \dot{y}_{CM,bers} = \frac{m_1\dot{y}_1+m_2\dot{y}_2}{m_1+m_2} \\ z_{CM,bers} = \frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2} & \dot{z}_{CM,bers} = \frac{m_1\dot{z}_1+m_2\dot{z}_2}{m_1+m_2} \end{array} \tag{5.61}$$

$$\begin{array}{ll} x_{CM,pro} = \frac{m_3x_3+m_4x_4}{m_3+m_4} & \dot{x}_{CM,pro} = \frac{m_3\dot{x}_3+m_4\dot{x}_4}{m_3+m_4} \\ y_{CM,pro} = \frac{m_3y_3+m_4y_4}{m_3+m_4} & \dot{y}_{CM,pro} = \frac{m_3\dot{y}_3+m_4\dot{y}_4}{m_3+m_4} \\ z_{CM,pro} = \frac{m_3z_3+m_4z_4}{m_3+m_4} & \dot{z}_{CM,pro} = \frac{m_3\dot{z}_3+m_4\dot{z}_4}{m_3+m_4} \end{array} \tag{5.62}$$

5.4 I parametri iniziali

5.4.1 Intervallo dei parametri iniziali

Nella scelta dei parametri iniziali si è tenuto conto dei dati osservativi disponibili per NGC 6752 e per la PSR-A.

Le masse

Per quanto riguarda la binaria costituita dalla PSR-A+co, la massa della pulsar è stata scelta $m_{PSR-A} = 1.4\, m_{\odot}$, ossia la massa tipica di una NS; mentre per la massa della compagna m_{co} abbiamo distinto tra

- ⋆ simulazioni della binaria pre-riciclaggio $\mapsto$ $m_{co} = 0.8\, m_{\odot}$;
- ⋆ simulazioni della binaria post-riciclaggio $\mapsto$ $m_{co} = 0.2\, m_{\odot}$;

Nel caso pre-riciclaggio il valore della m_{co} è stato scelto in modo arbitrario, anche se in accordo con gli scenari evolutivi per una Pulsar Binaria di Piccola Massa (LMBP). Nel caso post-riciclaggio il valore $m_{co} = 0.2\, m_{\odot}$ è in accordo con le osservazioni.

Per quanto riguarda la *binaria di BH*, abbiamo giocato con un range di masse il più possibile vario, entro i limiti fissati dalle stime della massa non luminosa centrale in NGC 6752 (si veda il Capitolo 4) e dalla correlazione $M - \sigma$ (si veda l'appendice A). Inoltre abbiamo scartato il caso di binarie costituite da componenti di massa tra loro confrontabile, perché troppo facili da eiettare dall'ammasso globulare.
I sistemi considerati sono i seguenti:

$m_1\,(m_\odot)$	$m_2\,(m_\odot)$
30	3
50	10
200	10

Abbiamo considerato anche un sistema del tipo *BH + stella del cusp*, scegliendo per le rispettive masse i seguenti valori:

$m_1\,(m_\odot)$	$m_2\,(m_\odot)$
500	1

La massa dell'ipotetico BH centrale è stata scelta in accordo con i limiti fissati dalle stime della massa non luminosa centrale in NGC 6752 (si veda il Capitolo 4) e dalla correlazione $M-\sigma$ (appendice A). Per la stella del cusp è stato scelto un valore superiore alla massa media delle stelle dell'ammasso ($\langle m\rangle = 0.4-0.5 m_\odot$), tenendo conto della segregazione di massa (in virtù della quale il cusp è probabilmente costituito da NS e WD pesanti).

Infine abbiamo considerato anche una binaria formata da un BH relativamente poco massivo e una stella di neutroni, con la seguente scelta di masse:

$m_1\,(m_\odot)$	$m_2\,(m_\odot)$
50	1.4

Le eccentricità

Dalle osservazioni (D'Amico et al., 2002 [17]) è noto, per ora, solo il limite superiore all'eccentricità della PSR-A, ossia 10^{-5}. Quindi, nelle simulazioni post-riciclaggio ho posto $e_{PSR-A} = 10^{-5}$.
Nelle simulazioni pre-riciclaggio l'eccentricità può essere scelta in modo arbitrario: sarà il trasferimento di massa a circolarizzare l'orbita. Abbiamo effettuato alcune simulazioni pre-riciclaggio con $e_{PSR-A} = 0$, altre con $e_{PSR-A} = 0.7$.

L'eccentricità della binaria bersaglio è stata fissata pari a $e_{BH} = 0.7$, poiché questo è il valore medio per una binaria all'equilibrio (cfr. Cap.2, Sez.2.10). Sarebbe interessante in futuro scandagliare anche altri valori dell'eccentricità della binaria bersaglio.

I semiassi maggiori

Il semiasse maggiore della PSR-A+co è noto dalle osservazioni (D'Amico et al. 2002): $a_{PSR-A+co} \simeq 0.0223$ A.U..
Nelle simulazioni pre-riciclaggio la separazione orbitale è stata scelta in modo

tale che il periodo orbitale fosse all'incirca il periodo di biforcazione $P_{bif} \approx 1-2$ giorni. Quindi $a_{PSR-A+co,pre-riciclaggio} \in [0.025, 0.040]$ A.U..

Nella scelta del semiasse maggiore della binaria bersaglio abbiamo tenuto conto delle seguenti considerazioni (Colpi et al. 2002 [16]).

- La binaria deve essere sufficientemente hard da fornire al centro di massa della PSR-A+co un'energia cinetica $\sim \frac{1}{2} m_{PSR-A+co} v_{ej}^2$:

$$\begin{aligned} a &\sim G m_1 m_2 / ((m_1 + m_2) v_{ej}^2) \\ &\sim 6\text{A.U.} \left(\frac{m_1}{50 m_\odot}\right) \left(\frac{m_2}{10 m_\odot}\right) \left(\frac{60 m_\odot}{m_1 + m_2}\right) \left(\frac{35\,\text{km/s}}{v_{ej}}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.63}$$

- La binaria deve essere sufficientemente larga da non coalescere per almeno $\tau_{GW} \geq 10$ Gyr per emissione di onde gravitazionali (utilizzando la relazione 2.51):

$$\begin{aligned} a \geq a_{gw} &= \left(\frac{256}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 (1 - e^2)^{7/2}} \tau_{gw}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\sim 0.3\,\text{A.U.} \left(\frac{m_1}{50 m_\odot} \frac{m_2}{10 m_\odot} \left(\frac{m_1 + m_2}{60 m_\odot}\right)\right)^{1/4} \end{aligned} \tag{5.64}$$

Quindi, per un sistema con $m_1 = 50 m_\odot$, $m_2 = 10 m_\odot$, $e = 0.7$, possiamo prendere il semiasse maggiore della binaria nel range: 0.3A.U. $\lesssim a \lesssim 6$ AU. Per le altre binarie considerate si veda la seguente tabella.

(m_1, m_2) $(m_\odot)$	a (A.U.)
(30,3)	[0.18, 1.98]
(50,10)	[0.31, 6.05]
(200,10)	[0.61, 6.91]
(500,1)	[0.54, 0.72]
(50,1.4)	[0.18, 0.99]

Per limiti di tempo, abbiamo effettuato tutte le simulazioni con semiasse maggiore della binaria di BH $a = 1$ A.U., eccetto che per il sistema $(m_1, m_2) = (200 m_\odot, 10 m_\odot)$. Per quest'ultimo abbiamo considerato un range di separazioni orbitali $a \in [1, 7]$ A.U., e ne abbiamo tratto una relazione di scala tra v_{ej} ed a che si può estendere anche agli altri sistemi (si veda il Cap.6, Sez.2.1). Nel caso del BH singolo + stella del CUSP abbiamo effettuato simulazioni sia con $a = 1$ A.U. che con $a = 3$ A.U..

La distanza iniziale D

Come abbiamo già detto, è necessario cominciare l'integrazione quando i centri di massa delle due binarie sono sufficientemente lontani perché l'interazione gravitazionale sia trascurabile. Una scelta naturale è quella di cominciare l'integrazione al raggio di influenza della binaria di BH ($r_a \equiv 2G(M_{BH})/\langle v^2 \rangle$), definito come la distanza dal BH entro cui le stelle con velocità di dispersione $< v^2 >$ sono legate al BH di massa M_{BH}.

Tuttavia per alcuni dei sistemi che abbiamo considerato, il raggio di influenza è troppo grande perché l'integrazione si possa portare a termine in un tempo ragionevole. In questo caso abbiamo scelto di cominciare l'integrazione ad una distanza fissa $D = 1000$ A.U., riscalando opportunamente alcuni parametri del sistema.

Le distanze iniziali e i raggi di influenza per ciascuno dei sistemi considerati sono illustrate nella seguente tabella.

(m_1, m_2) $(m_\odot)$	r_a (A.U.)	D (A.U.)
$(30, 3)$	1200	1200
$(50, 10)$	2200	2200
$(200, 10)$	7600	1000
$(500, 1)$	18200	1000
$(50, 1.4)$	1880	1880

La velocità del centro di massa della binaria proiettile v

La scelta del range di velocità iniziali è stata effettuata sulla base delle seguenti considerazioni.
All'equilibrio la velocità del centro di massa della binaria formata dalla PSR-A+co è data dalla relazione:

$$v_{PSR-A+co} \sim \left(\frac{\langle m \rangle}{m_{PSR-A} + m_{co}} \right)^{1/2} \langle v \rangle \tag{5.65}$$

La velocità di dispersione lungo la linea di vista (ricavata da misure spettroscopiche della popolazione di giganti rosse di NGC 6752) è $\sigma \simeq 7$ km s^{-1}. Sostituendo nella 5.65 $\langle v \rangle \simeq \sqrt{3}\sigma$, $\langle m \rangle \simeq 0.7\, m_\odot$ (dove $0.7 - 0.8\, m_\odot$ è la massa tipica di una gigante rossa in in NGC 6752), si trova $v_{PSR-A+co} \sim 8$ km s^{-1}.

Poiché siamo interessati solo al caso in cui la *binaria proiettile non è inizialmente legata alla binaria bersaglio* , scegliamo il range di velocità iniziali in modo tale che al raggio di influenza l'energia totale sia $\gtrsim 0$, nell'approssimazione in cui le binarie sono viste come due punti coincidenti con i rispettivi centri di massa, ossia imponiamo:

$$0 \lesssim E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{G(m_1+m_2)(m_3+m_4)}{r_a} \tag{5.66}$$

dove $\mu \equiv \frac{(m_1+m_2)(m_3+m_4)}{(m_1+m_2+m_3+m_4)}$ e v è la velocità della particella ridotta.
Tenendo conto del limite inferiore fissato da questa equazione e del fatto che $\langle v_{PSR-A+co}\rangle \sim 8$ km/s, abbiamo scelto di prendere le velocità iniziali nel range $v \in [7, 11]$ km/s.

Per quei sistemi in cui dobbiamo integrare da una distanza iniziale $D \ll r_a$, in quanto il raggio di influenza è proibitivamente grande, la velocità iniziale non può più essere presa nel range $[7, 11]$ km/s, bensì deve essere riscalata tenendo conto dell'attrazione gravitazionale esercitata dal BH. Per riscalare, utilizziamo ancora la conservazione dell'energia nell'approssimazione in cui le binarie sono viste come due punti coincidenti con i rispettivi centri di massa:

$$\frac{1}{2}\mu v(r_a)^2 - \frac{G(m_1+m_2)(m_3+m_4)}{r_a} = \frac{1}{2}\mu v(D)^2 - \frac{G(m_1+m_2)(m_3+m_4)}{D} \tag{5.67}$$

da cui risulta:

$$v(D)^2 = v(r_a)^2 + 2Gm_T\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{r_a}\right) \tag{5.68}$$

dove $m_T = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$.
Se poniamo $D = 1000$ A.U., i range di velocità iniziali corrispondenti saranno:

(m_1, m_2) $(m_\odot)$	v (km s^{-1})
$(500, 1)_{pre-riciclaggio}$	$(30, 32)$
$(500, 1)_{post-riciclaggio}$	(30.32)
$(200, 10)$	$(15, 17)$

Il parametro di impatto b

Per scegliere il range dei parametri di impatto significativi abbiamo inizialmente usato la formula (2.71), per avere una stima approssimata ($b_{approx} \sim \left(\frac{2Gm_T}{a}\right)^{1/2} v_\infty^{-1}$) del parametro di impatto tale per cui la distanza di massimo avvicinamento è dell'ordine della separazione orbitale della binaria bersaglio. Successivamente abbiamo effettuato alcune decine di simulazioni di prova con valori del parametro di impatto dell'ordine di b_{approx} per cercare di stabilire:

- il parametro di impatto massimo b_{max} per cui lo scattering comporta un trasferimento di energia non trascurabile al centro di massa della binaria di campo;

- il parametro di impatto minimo b_{min} al di sotto del quale la frazione di ionizzazioni diventa dominante ($\gtrsim 50-70\%$).

I valori b_{min} e b_{max} così ricavati (riportati nella seguente Tabella) sono stati presi come limiti dell'intervallo entro cui, con il metodo Monte Carlo ed utilizzando una opportuna funzione di distribuzione (si veda la sezione successiva), abbiamo scelto i parametri di impatto per le nostre simulazioni.

$(m_1\, m_2)$ $(m_\odot)$	b $(A.U.)$
(30, 3)	1-50
(50, 10)	1-60
(200, 10)	10-100
(500, 1)	10-100
(50, 1.4)	1-60

In realtà, per quei sistemi in cui siamo stati costretti ad integrare da una distanza iniziale $D < r_a$, il parametro di impatto andrà opportunamente riscalato. Infati, a causa dell'enorme focalizzazione gravitazionale di tali sistemi, a una distanza $D \ll r_a$ la traiettoria della binaria proiettile è già significativamente deviata dal suo andamento imperturbato.
Per riscalare opportunamente il parametro di impatto abbiamo utilizzato la conservazione del momento angolare specifico del centro di massa della binaria proiettile:

$$b(r_a)\, v(r_a) \simeq b(D)\, v(D) \tag{5.69}$$

dove $v(r_a)$ e $v(D)$ sono rispettivamente la velocità del centro di massa della binaria proiettile al raggio di influenza e alla distanza D a cui comincia l'integrazione; mentre $b(r_a)$ è il valore del parametro d'impatto imperturbato al raggio di influenza, e $b(D)$ il parametro di impatto effettivo alla distanza iniziale D. Da questa relazione si ricava:

$$b(D) = b(r_a)\, \frac{v(r_a)}{v(D)} \tag{5.70}$$

Gli angoli: ϕ, θ, ψ, f, f_{PSR-A}

Riportiamo nella seguente tabella i range degli angoli e delle fasi delle due binarie (Hut & Bahcall 1983).

Variabile	Intervallo
ϕ	$[0,\, 2\pi)$
θ	$[0,\, \pi/2]$
ψ	$[0,\, 2\pi)$
f	$[0,\, 2\pi)$
f_{PSR-A}	$[0,\, 2\pi)$

5.4.2 Metodo Monte Carlo per i parametri iniziali

Visto il gran numero di parametri liberi in un sistema a 4 corpi, effettuare le simulazioni per una griglia ordinata di condizioni iniziali sarebbe proibitivo dal punto di vista del tempo di integrazione. Pertanto abbiamo scelto di "pescare" le condizioni iniziali con il metodo Monte Carlo. Per essere più precisi abbiamo fissato alcuni parametri (m_1, m_2, m_3, m_4, a, a_{PSR-A}, e, e_{PSR-A}, D) e abbiamo campionato gli altri ($b, v, \phi, \theta, \psi, f, f_{PSR-A}$) con il metodo Monte Carlo.

Sulla scorta di Hut & Bahcall, abbiamo assunto per questi parametri le distribuzioni di probabilità riportate nella seguente tabella.

Variabile	Probabilità omogenea in
v	v
b	b^2
ϕ	ϕ
θ	$\cos\theta$
ψ	ψ
f	$E - e\sin E$
f_{PSR-A}	$E_{PSR-A} - e\sin E_{PSR-A}$

- Per la velocità abbiamo assunto una distribuzione uniforme. In realtà sarebbe stato formalmente più corretto considerare una maxwelliana o una gaussiana troncata. Tuttavia, abbiamo potuto verificare che, entro il range di velocità iniziali scelto, la velocità del centro di massa della PSR-A+co dopo lo scattering in prima approssimazione non dipende dal valore della velocità iniziale. Alcune simulazioni di prova effettuate con velocità iniziali selezionate con una distribuzione gaussiana troncata hanno confermato questa idea.

- Il parametro di impatto b è campionato secondo una distribuzione di probabilità proporzionale a b^2, l'area di un elemento di superficie ortogonale alla direzione di moto della binaria proiettile.

- L'elemento di angolo sferico è $\sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi = \mathrm{d}(\cos\theta)\, \mathrm{d}\phi$. Quindi, la distribuzione di probabilità per ϕ è omogenea in ϕ, mentre quella per θ è omogenea in $\cos\theta$.

- Per ottenere la distribuzione di probabilità corretta per la fase iniziale f (e ovviamente f_{PSR-A}) su orbite eccentriche, bisogna dare a ogni elemento di angolo compreso tra f e $f + \mathrm{d}f$ un peso corrispondente alla frazione di tempo che il sistema passa in quella parte dell'orbita. Poiché non ci sono relazioni che ci permettono di fare questo direttamente per la fase f, sfruttiamo la relazione kepleriana per l'anomalia eccentrica E:

$$\frac{2\pi}{P}t = E - e\sin E \tag{5.71}$$

dove P è il periodo orbitale, t il tempo dal passaggio al periastro ed e l'eccentricità.
L'anomalia vera f è legata all'anomalia eccentrica E dalla relazione:

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \tag{5.72}$$

In pratica, con il metodo Monte Carlo è stato necessario generare con distribuzione di probabilità uniforme un certo numero di valori $x = E - e\sin E$, da cui ricavare i corrispondenti valori di E (poiché l'equazione che lega x ed E non è risolubile analiticamente, questo passaggio è stato effettuato numericamente con il metodo della bisettrice), da cui finalmente abbiamo calcolato f utilizzando la 5.72.

I numeri random sono stati generati uniformemente nell'intervallo unitario utilizzando il generatore *ran3* (Numerical Recipes in C [75], pag.283) ed adattati al range e alla distribuzione di probabilità scelti con un codice appositamente costruito.

5.5 Adattamento del passo

Come suggerito da Hut & Bahcall (1983), l'ampiezza del passo di integrazione, dt, viene determinata ad ogni step come:

$$\mathrm{d}t = \epsilon \min_{i,j} \frac{\mid \vec{x}_i - \vec{x}_j \mid}{\mid \vec{v}_i - \vec{v}_j \mid} \tag{5.73}$$

dove $\epsilon = 0.1$, mentre gli indici $i = 1...N$ e $j = 1...N$ (con $N = 3$ per i 3 corpi, $N = 4$ per i 4 corpi) labellano le singole stelle.

Questo criterio riduce l'ampiezza del passo proprio quando le stelle sono più vicine, ossia quando interagiscono più intensamente.

5.6 Conservazione dell'energia e del momento angolare

Con il criterio appena illustrato per l'adattamento del passo, la precisione nella conservazione dell'energia è in media $\frac{\Delta E}{E_0} \sim 10^{-9} - 10^{-8}$ per il codice che integra i 4-corpi, $\frac{\Delta E}{E_0} \sim 10^{-12} - 10^{-11}$ per il codice che integra i 2-corpi. La precisione nella conservazione del momento angolare è di un ordine di grandezza migliore: $\frac{\Delta L}{L_0} \sim 10^{-11} - 10^{-10}$ per il codice che integra i 4-corpi, $\frac{\Delta L}{L_0} \sim 10^{-13} - 10^{-12}$ per il codice che integra i 2-corpi.

Capitolo 6

I risultati

In questo Capitolo discuteremo i risultati delle nostre simulazioni, e in particolare:

1. analizzeremo

- ~ 9000 eventi di scattering coinvolgenti binarie di BH moderatamente massive e una pulsar binaria avente i parametri attuali (ricavati dalle osservazioni) della PSR-A (per la quale, d'ora in poi, useremo la notazione PSR-A+co) (Sez.2.1);
- ~ 2000 eventi di scattering coinvolgenti un singolo BH di 500 $m_{\odot}$, una stella del cusp di 1 $m_{\odot}$ e il sistema PSR-A+co (Sez.2.2.a);
- ~ 2000 eventi di scattering coinvolgenti un singolo BH di 500 $m_{\odot}$, una stella del cusp di 1 $m_{\odot}$ e una binaria i cui parametri orbitali sono stati scelti sulla base di quella che doveva essere la PSR-A prima della fase di trasferimento di massa (per la quale, d'ora in poi, useremo la notazione PSR-A+CO) (Sez.2.2.b);
- ~ 1000 eventi di scattering tra la PSR-A+co e una binaria formata da un BH di 50 $m_{\odot}$ e una stella di neutroni (1.4 $m_{\odot}$) (Sez.2.4).

2. Calcoleremo lo spostamento medio del BH, ricavato dai risultati delle simulazioni (Sez.2.5).

3. Presenteremo un modello elementare che descrive la crescita in massa di una binaria di BH per cattura mareale di stelle e l'evoluzione della sua separazione orbitale per scattering ed emissione di onde gravitazionali (Sez.2.5).

6.1 Le simulazioni a 3 corpi

In questo lavoro di Tesi ci siamo serviti del codice a tre corpi soprattutto come strumento di verifica, per controllare che i nostri risultati fossero in buon accordo con quelli presenti in letteratura. In particolare abbiamo utilizzato come termine di confronto i risultati ottenuti da Hills nel suo articolo del 1975 [47] (uno degli articoli fondamentali nel campo delle simulazioni di interazioni a 3 corpi).

Sulla scorta di Hills, abbiamo effettuato tre gruppi di simulazioni coinvolgenti binarie di egual massa.

gruppo **A**: Simulazioni coinvolgenti una binaria di stelle di egual massa ($m_1 = m_2 = m_\odot$) e una stella di campo con $m_3 = m_\odot$.

gruppo **B**: Simulazioni coinvolgenti una binaria di stelle di egual massa ($m_1 = m_2 = m_\odot$) e una stella di campo con $m_3 = 3\,m_\odot$.

gruppo **C**: Simulazioni coinvolgenti una binaria di stelle di egual massa ($m_1 = m_2 = 3\,m_\odot$) e una stella di campo con $m_3 = m_\odot$.

In tutti i casi abbiamo scelto una separazione orbitale iniziale $a = 10\,\mathrm{A.U.}$ e un'eccentricità iniziale $e = 0$.
L'integrazione comincia quando la stella proiettile si trova a $40\,a = 400\,\mathrm{A.U.}$ dal centro di massa della binaria bersaglio e termina quando la distanza tra almeno due delle tre stelle è maggiore di $60\,a = 600\,\mathrm{A.U.}$, oppure dopo 10^7 passi, se non è ancora stata raggiunta questa distanza-limite. In quest'ultimo caso l'interazione viene classificata come risonanza irrisolta. Abbiamo classificato come ionizzazioni tutti i casi in cui la distanza finale tra tutte e tre la stelle del sistema è maggiore di 10 volte la separazione orbitale iniziale della binaria bersaglio.
Riportiamo nelle seguenti tabelle i risultati delle nostre simulazioni, confrontandoli con i valori ottenuti da Hills [47].

Parametri iniziali di ciascuna famiglia di simulazioni:

numero della serie	v_∞ (km/s)	b/a	numero di simulazioni Hills	numero di simulazioni nostre
A1	0	0	170	100
A2	1	0	444	100
A3	1	4	83	100
A4	2	0	279	500
A5	2	2	224	500
A7	4	0	418	500
A8	5	0	138	200
A11	6	0	307	100
A20	12	0	198	500
A23	13	0	137	200
A31	25	0	200	100
B1	0	0	195	100
B2	1	0	398	100
B3	2	0	197	500
B13	60	0	100	100
C1	0	0	132	100
C2	5	0	222	500
C3	10	0	168	500
C5	20	0	23	200
C9	50	0	100	200

v_∞= velocità iniziale della stella di campo

b= parametro di impatto, a separazione orbitale.

Confronto tra la probabilità di ionizzazione (P_I) e la probabilità di scambio (P_E) ricavate dalle nostre simulazioni e quelle ricavate da Hills. La probabilità di scambio si riferisce al totale dei casi in cui non c'è stata ionizzazione.

numero della serie	$(P_I)_{hills}$	$(P_E)_{hills}$	$(P_I)_{nostro}$	$(P_E)_{nostro}$
A1	0.00	0.89	0.00	0.78
A2	0.00	0.89	0.00	0.83
A3	0.00	0.86	0.00	0.86
A4	0.00	0.86	0.00	0.81
A5	0.00	0.87	0.00	0.84
A7	0.00	0.92	0.00	0.85
A8	0.00	0.93	0.00	0.90
A11	0.00	0.97	0.00	0.84
A20	0.015	1.00	0.098	0.998
A23	0.007	1.00	0.10	1.00
A31	0.97	1.00	0.98	1.00
B1	0.00	1.00	0.00	0.99
B2	0.00	1.00	0.03	0.93
B3	0.00	1.00	0.00	1.00
B13	1.00	0.00	1.00	0.00
C1	0.00	0.04	0.00	0.02
C2	0.00	0.04	0.00	0.04
C3	0.00	0.02	0.00	0.03
C5	0.00	0.04	0.00	0.05
C9	0.09	0.00	0.17	0.00

Variazioni medie dell'energia di legame ed eccentricità finali. Confronto tra i risultati delle nostre simulazioni e quelli di Hills.

numero della serie	$(\Delta E/E)_{hills}$	$(\Delta E/E)_{nostro}$	$\mathrm{ERR}_{(\Delta E/E)}$	$(e)_{hills}$	$(e)_{nostro}$	ERR_e
A1	0.475	0.569	0.198	0.637	0.686	0.050
A2	0.493	0.420	0.148	0.627	0.619	0.012
A3	0.489	0.457	0.064	0.656	0.624	0.049
A4	0.486	0.462	0.049	0.629	0.661	0.051
A5	0.365	0.461	0.263	0.564	0.658	0.166
A7	0.449	0.377	0.160	0.726	0.633	0.128
A8	0.400	0.320	0.200	0.639	0.641	0.003
A11	0.328	0.289	0.119	0.640	0.632	0.028
A20	-0.238	-0.203	0.145	0.682	0.638	0.064
A23	-0.216	-0.207	0.042	0.694	0.622	0.104
A31	-0.980	-0.969	0.011	0.714	0.618	0.134
B1	2.287	2.619	0.145	0.661	0.650	0.017
B2	2.340	2.806	0.199	0.628	0.605	0.037
B3	2.509	2.437	0.029	0.662	0.654	0.012
B13	-1.000	-0.980	0.020	...	...	...
C1	0.247	0.271	0.024	0.567	0.549	0.032
C2	0.276	0.233	0.043	0.584	0.619	0.060
C3	0.158	0.147	0.070	0.598	0.615	0.028
C5	-0.327	-0.246	0.248	0.694	0.659	0.050
C9	-0.293	-0.338	0.154	0.558	0.519	0.039

$\Delta E = E_f - E$, dove E_f = energia di legame finale, E = energia di legame iniziale.

$\mathrm{ERR}_{(\Delta E/E)} = \mid (\Delta E/E)_{hills} - (\Delta E/E)_{nostro} \mid / (\Delta E/E)_{hills}$

e= eccentricità finale

$\mathrm{ERR}_e = \mid e_{hills} - e_{nostro} \mid / e_{hills}$

Note:

- In generale, la differenza tra le variazioni di energia di legame calcolate con il nostro codice e quelle calcolate da Hills è inferiore al 20% (in media $\sim$ 10%).
- Per le eccentricità la differenza è nettamente inferiore ($\sim$ 5%).

Purtroppo non abbiamo trovato in letteratura risultati altrettanto completi (eccentricità finali, variazioni dell'energia di legame, etc.) per testare il codice a 4 corpi. Tuttavia, visto che esso nasce proprio come la naturale estensione del nostro codice a 3 corpi, già testato con successo, non abbiamo motivi per dubitare della sua affidabilità. Nel dir questo siamo confortati anche dalla auto-consistenza dei risultati ottenuti con il codice a 4 corpi (che verranno illustrati nella sezione seguente).

6.2 Le simulazioni a 4 corpi

6.2.1 La binaria di BH

Inizialmente abbiamo considerato tre possibili binarie di BH, differenti l'una dall'altra solo per le masse delle componenti, ossia:

- una binaria particolarmente "leggera", con $m_1 = 30\, m_\odot$, $m_2 = 3\, m_\odot$;

- una binaria di massa intermedia ($m_1 = 50\, m_\odot$, $m_2 = 10\, m_\odot$);

- una binaria con una componente molto più massiccia ($m_1 = 200\, m_\odot$, $m_2 = 10\, m_\odot$).

In tutti i casi abbiamo scelto separazione orbitale $a = 1$ A.U. ed eccentricità $e = 0.7$.

6.2.1.a Il sistema $(\mathbf{30\, m_\odot}, \mathbf{3\, m_\odot})$

La simulazione di 1000 eventi di scattering coinvolgenti una binaria bersaglio con $m_1 = 30\, m_\odot$, $m_2 = 3\, m_\odot$, separazione orbitale $a = 1$ A.U., eccentricità $e = 0.7$, e una binaria proiettile con le caratteristiche della PSR-A+co ha dato i seguenti risultati.

Classificazione degli scattering:

Gli esiti degli scattering simulati sono riportati nella seguente tabella.

	Numero di eventi	Probabilità
Flyby puri	645	0.645
Ionizzazioni	83	0.083
Risonanze irrisolte	25	0.025
Sistemi finali legati	247	0.247

dove per sistemi finali legati (d'ora in poi SL) si intendono tutti i casi in cui l'energia totale dei centri di massa delle due binarie è negativa, e quindi la binaria PSR-A+co rimane su un'orbita legata attorno alla binaria di BH. Probabilmente dopo un certo numero di periodi orbitali la binaria PSR-A+co acquista energia cinetica sufficiente per fuggire all'infinito. Tuttavia non abbiamo portato avanti fino in fondo l'integrazione di questi sistemi per due motivi.

1. Avrebbe richiesto tempi di integrazione eccessivi.

2. Il semiasse maggiore dell'orbita della PSR-A+co attorno alla binaria di BH è generalmente dell'ordine della distanza interstellare nel core di un ammasso globulare. Quindi nella realtà il sistema quadruplo non è più un sistema isolato: sono le perturbazioni dovute alle altre stelle del core a determinarne l'evoluzione.

L'*elevata probabilità che si formi un sistema finale legato* ($\sim 20-30\%$ per tutti i sistemi che verranno cosiderati) si spiega con la presenza di un oggetto molto più massivo degli altri, il quale, con la sua attrazione gravitazionale, tende a tenere legati a sé gli altri tre corpi. Questo fatto era già stato notato da Hills (1983) [49] per le interazioni binaria - singola e da Bacon et al. (1996) [6] per le interazioni binaria - binaria.

Per risonanze irrisolte (d'ora in poi R) si intendono tutti i casi in cui nessuna delle due componenti della PSR-A+co riesce a raggiungere una distanza dal centro di massa della binaria di BH superiore a 30 volte la separazione orbitale di quest'ultima in 10^8 step di integrazione.

Per ionizzazioni intendiamo (definizione di comodo) tutti i casi in cui la distanza finale tra la pulsar e la compagna è più di 20 volte la separazione orbitale iniziale.
Le ionizzazioni possono a loro volta essere distinte tra:

- ionizzazioni risonanti: quelle in cui la separazione finale tra le due componenti della PSR-A+co è maggiore di 20 volte il semiasse maggiore iniziale e la distanza tra ciascuna delle due e il centro di massa della binaria di BH è inferiore a 30 volte la separazione orbitale di quest'ultima;

- ionizzazioni in cui la PSR fugge all'infinito e la compagna rimane legata alla binaria di BH;

- ionizzazioni in cui la nana bianca fugge all'infinito e la PSR rimane legata alla binaria di BH;

- ionizzazioni in cui entrambe le componenti della pulsar binaria fuggono all'infinito.

Operando questa distinzione tra le ionizzazioni si trova:

	Numero di eventi	Probabilità rispetto al totale degli eventi	Probabilità rispetto al totale delle ionizzazioni
Ionizzazioni risonanti	9	0.009	0.109
Ionizzazioni con fuga della PSR	22	0.022	0.265
Ionizzazioni con fuga della WD	50	0.05	0.602
Ionizzazioni con fuga della PSR e della WD	2	0.002	0.024

Velocità di rinculo:

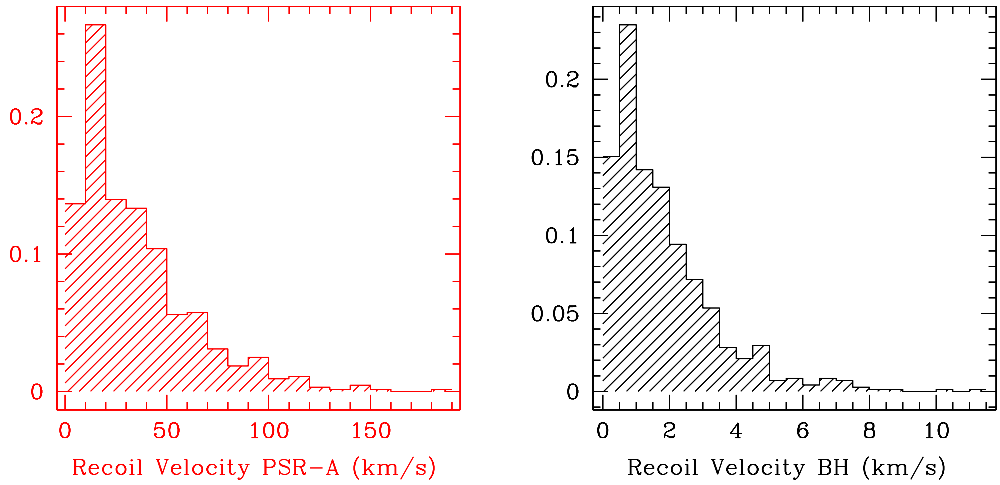
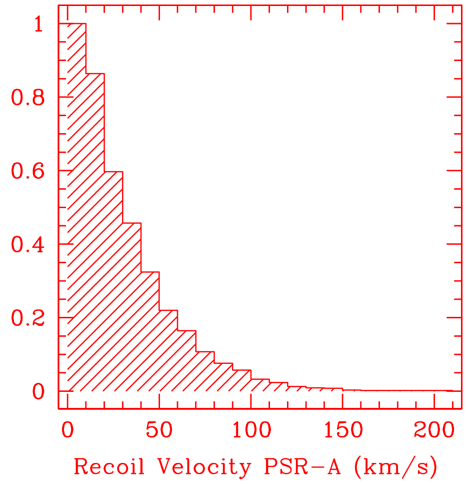


Figura 6.1: $m_1 = 30\,m_\odot$, $m_2 = 3\,m_\odot$. a) Velocità di rinculo della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte, ionizzazioni e sistemi quadrupli legati. b) Velocità di rinculo della binaria di BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e sistemi quadrupli legati.

Senza considerare le R, i SL e le I, le velocità di espulsione risultano:

$\langle V_{PSR-A}\rangle$	$34.73 \pm 29.01\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
$V_{rms\,PSR-A}$	$45.25\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
$V_{pp\,PSR-A}$	$15\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
$\langle V_{BH}\rangle$	$1.68 \pm 1.41\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
$V_{rms\,BH}$	$2.19\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
$V_{pp\,BH}$	$0.75\ \mathrm{km\,s^{-1}}$



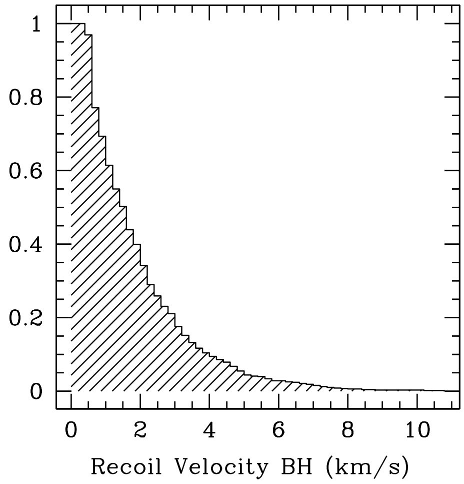


Figura 6.2: $m_1 = 30\, m_\odot$, $m_2 = 3\, m_\odot$. a) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo della PSR-A+co, senza R, I, SL. b) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo del BH trascurando R e SL.

dove $\langle V_{PSR-A}\rangle$, $V_{rms\, PSR-A}$, $\langle V_{BH}\rangle$ rappresentano rispettivamente la velocità di rinculo media (in modulo), la root mean square velocity e la velocità di rinculo più probabile (ossia il picco dell'istogramma 6.1a) acquisite dal centro di massa della [PSR-A+co]; mentre $\langle V_{BH}\rangle$, $V_{rms\, BH}$, $V_{pp\, BH}$ sono rispettivamente la velocità di rinculo media (in modulo), la root mean square velocity e la velocità di rinculo più probabile acquisite dal centro di massa della binaria di BH.

Quando viene ionizzata e fugge all'infinito, la pulsar acquista una velocità di rinculo media pari a 146.11 ± 54.55 km s^{-1}.

Escludendo le R e i SL, per il centro di massa della binaria di BH ricaviamo:

$\langle V_{BH}\rangle$	1.85 ± 1.60 km s^{-1}
$V_{rms\, BH}$	2.45 km s^{-1}
$V_{pp\, BH}$	0.75 km s^{-1}

Eccentricità:

Trascurando le R e le I, le eccentricità finali del sistema risultano:

$\langle e_{PSR-A}\rangle$	$2.09 \cdot 10^{-2} \pm 2.09 \cdot 10^{-2}$
$e_{pp\, PSR-A}$	$2.24 \cdot 10^{-5}$
$\langle e_{BH}\rangle$	$6.98 \cdot 10^{-1} \pm 3.4 \cdot 10^{-2}$
$e_{pp\, BH}$	$7.06 \cdot 10^{-1}$

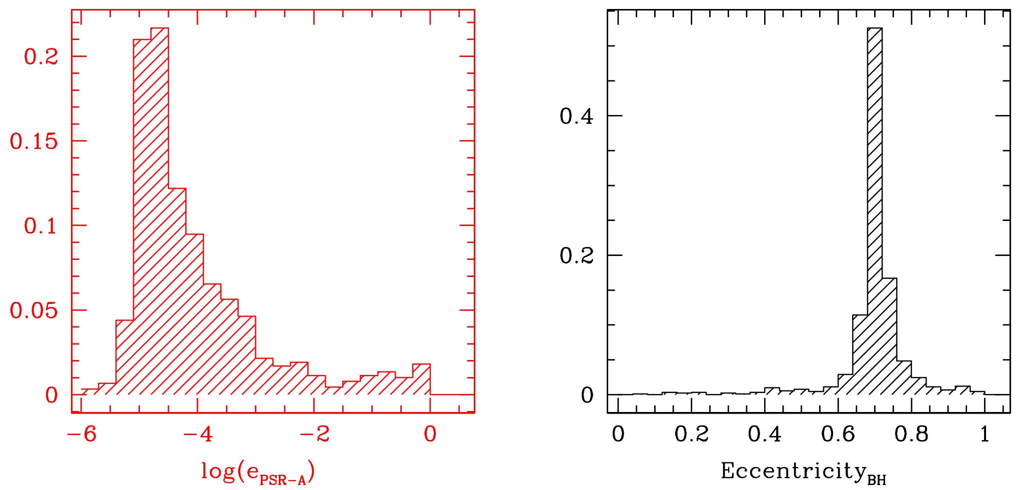


Figura 6.3: $m_1 = 30\,m_\odot$, $m_2 = 3\,m_\odot$. a) Eccentricità finale della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Eccentricità finale della binaria di BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte.

dove $\langle e_{PSR-A}\rangle$ ed $e_{pp\,PSR-A}$ sono rispettivamente il valore medio (l'errore rappresenta il range di eccentricità che contiene il 68% dell'area dell'istogramma) e il valore più probabile (il picco della distribuzione) delle eccentricità finali della [PSR-A+co]; mentre $\langle e_{BH}\rangle$ ed $e_{pp\,BH}$ sono rispetivamente il valore medio e il valore più probabile delle eccentricità finali della binaria di BH.

La spiccata differenza tra valore medio e valore più probabile nel caso della PSRA+co indica da una parte che siamo di fronte ad una distribuzione asimmetrica (non gaussiana), dall'altra che siamo ancora dominati dalle fluttuazioni statistiche. Per determinare con accuratezza un parametro così sensibile alle fluttuazioni come l'eccentricità, dovremmo eseguire un numero molto più grande di simulazioni.

Un modo per aggirare questo problema è fare riferimento al picco della distribuzione di probabilità anziché al valore medio (che è quello più influenzato dalle fluttuazioni statistiche). Il valore ricavato per $e_{pp\,PSRA}$ ($\propto 10^{-5}$) indica che la struttura della PSR-A+co non viene alterata in modo significativo dagli scattering.

Energia di legame:

Senza le risonanze irrisolte:

$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$9.8 \cdot 10^{-3} \pm 1.411 \cdot 10^{-1}$
$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$	$-6.41 \cdot 10^{-2} \pm 2.782 \cdot 10^{-1}$

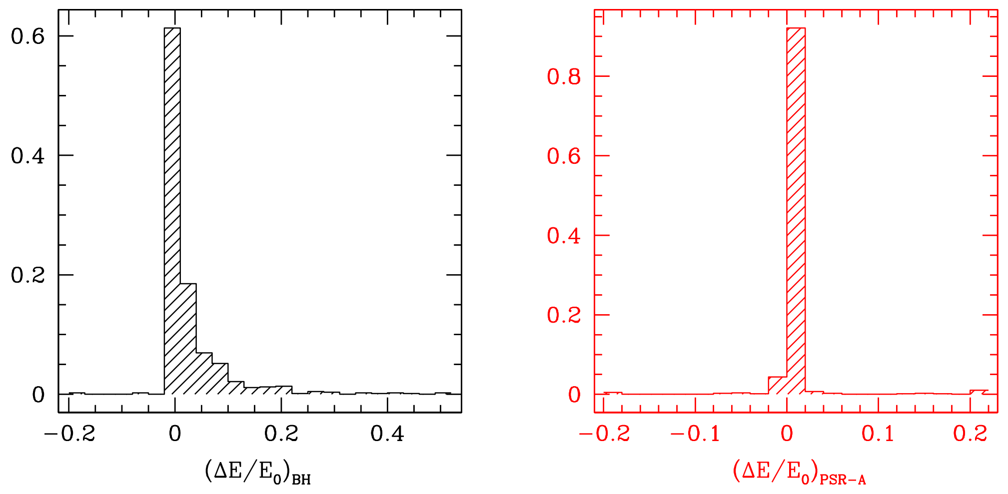


Figura 6.4: $m_1 = 30\,m_{\odot}$, $m_2 = 3\,m_{\odot}$. a) Variazione dell'energia di legame del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione dell'energia di legame della PSR-A+co trascurando le risonanze irrisolte.

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni:

$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$2.70 \cdot 10^{-2} \pm 8.64 \cdot 10^{-2}$
$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$	$6.2 \cdot 10^{-3} \pm 1.114 \cdot 10^{-1}$

dove $\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$ e $\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$ rappresentano la variazione dell'energia di legame rispettivamente della binaria di BH e della PSR-A+co.

Osservazioni:

- La variazione dell'energia di legame è per definizione negativa quando la binaria si allarga, positiva quando si stringe ($\Delta E \equiv E_{fin} - E_0$, dove E_0 = energia di legame iniziale, E_{fin} = energia di legame finale).

- Il fatto che, considerando anche le ionizzazioni, la variazione dell'energia di legame del BH è inferiore rispetto al caso in cui esse vengono trascurate è legato alla natura del sistema finale. Infatti la maggioranza delle ionizzazioni comporta la formazione di un sistema legato costituito dalla binaria di BH e da una delle due componenti della PSR-A+co. Per rendere legata la terza stella, la binaria di BH deve fornire parte della sua energia di legame, e, quindi, si allarga.

- Il valore negativo della variazione media dell'energia di legame della PSR-A quando si considerano anche le ionizzazioni è dovuto proprio all'incidenza di queste ultime.

- Quando si trascurano le ionizzazioni, l'energia di legame della PSR-A+co rimane pressoché immutata (variazione dello $\sim$ 0.6%). Questo conferma l'idea, emersa già dall'analisi delle eccentricità finali, che uno scattering con una binaria di $(30,\ 3)\, m_\odot$ altera poco i parametri orbitali della PSR-A+co.

Separazione orbitale:

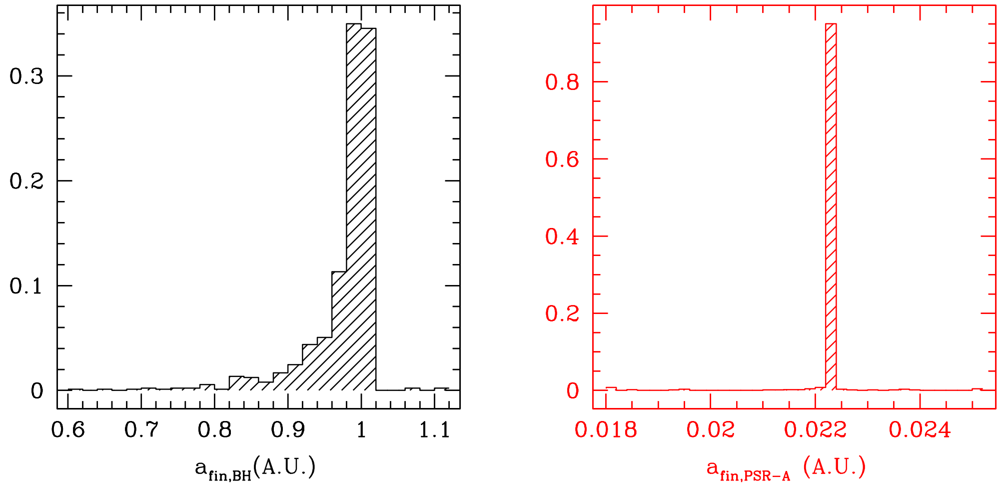


Figura 6.5: $m_1 = 30\, m_\odot$, $m_2 = 3\, m_\odot$. a) Variazione della separazione orbitale del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione della separazione orbitale della PSR-A+co trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni.

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni la variazione media della separazione orbitale della PSR-A+co e della binaria di BH risultano:

$\langle\frac{\Delta a}{a_0}\rangle_{BH}$	$2.2 \cdot 10^{-2} \pm 5.5 \cdot 10^{-2}$
$\langle\mid\frac{\Delta a}{a_0}\mid\rangle_{BH}$	$2.8 \cdot 10^{-2} \pm 2.7 \cdot 10^{-2}$
$\langle\frac{\Delta a}{a_0}\rangle_{PSR-A}$	$-8.0 \cdot 10^{-4} \pm 9.538 \cdot 10^{-2}$
$\langle\mid\frac{\Delta a}{a_0}\mid\rangle_{PSR-A}$	$1.0 \cdot 10^{-2} \pm 1.0 \cdot 10^{-2}$

dove $\langle\frac{\Delta a}{a_0}\rangle_{BH} \equiv \langle\frac{(a_0 - a_{finale})}{a_0}\rangle_{BH}$ è la variazione media del semiasse maggiore della binaria di BH in seguito ad un singolo scattering ($a_0 \equiv$ semiasse maggiore iniziale, $a_{finale} \equiv$ semiasse maggiore finale) e l'errore indicato è costituito dalla deviazione standard; mentre $\langle\mid\frac{\Delta a}{a_0}\mid\rangle_{BH} \equiv \langle\mid\frac{(a_0 - a_{finale})}{a_0}\mid\rangle_{BH}$ è la media dei moduli delle variazioni del semiasse maggiore della binaria di

BH in seguito ad un singolo scattering e l'errore indicato è costituito dall'intervallo entro cui è contenuto il 68% dell'area dell'istogramma.
Analogamente $\langle \frac{\Delta a}{a_0} \rangle_{PSR-A} \equiv \langle \frac{(a_0 - a_{finale})}{a_0} \rangle_{PSR-A}$ è la variazione media del semiasse maggiore della binaria PSR-A+co in seguito ad un singolo scattering ($a_0 \equiv$ semiasse maggiore iniziale, $a_{finale} \equiv$ semiasse maggiore finale) e l'errore indicato è costituito dalla deviazione standard; mentre $\langle \mid \frac{\Delta a}{a_0} \mid \rangle_{PSR-A} \equiv \langle \mid \frac{(a_0 - a_{finale})}{a_0} \mid \rangle_{PSR-A}$ è la media dei moduli delle variazioni del semiasse maggiore della binaria PSR-A+co in seguito ad un singolo scattering e l'errore indicato è costituito dall'intervallo entro cui è contenuto il 68% dell'area dell'istogramma.

Osservazioni:

- Se considerata in modulo, la variazione media del semiasse maggiore della binaria di BH ($\sim 3\%$) è dello stesso ordine di grandezza della variazione media del semiasse maggiore della PSR-A+co ($\sim 1\%$). Tuttavia, se si considera la variazione media della separazione orbitale con il segno, quella della binaria di BH rimane ancora dello stesso ordine di grandezza ($\sim 2\%$), ad indicare che tale binaria si stringe nella maggior parte dei casi; mentre quella della PSR-A+co è inferiore di circa un ordine di grandezza ($\sim 10^{-3}$), ad indicare che il numero di casi in cui la binaria proiettile si stringe è pressoché uguale al numero dei casi in cui si allarga.

6.2.1.b Il sistema ($\mathbf{50\,m_\odot}$, $\mathbf{10\,m_\odot}$)

La simulazione di 1000 eventi di scattering coinvolgenti una binaria bersaglio con $m_1 = 50\,m_\odot$, $m_2 = 10\,m_\odot$, separazione orbitale $a = 1$ A.U., eccentricità $e = 0.7$, e una binaria proiettile con le caratteristiche della PSR-A+co ha dato i seguenti risultati.

Classificazione degli scattering:

	Numero di eventi	Probabilità
Flyby puri	657	0.657
Ionizzazioni	107	0.107
Risonanze irrisolte	3	0.003
Sistemi finali legati	233	0.233

Le ionizzazioni si possono distinguere in:

	Numero di eventi	Probabilità rispetto al totale degli eventi	Probabilità rispetto al totale delle ionizzazioni
Ionizzazioni risonanti	10	0.010	0.093
Ionizzazioni con fuga della PSR	43	0.043	0.402
Ionizzazioni con fuga della WD	49	0.049	0.458
Ionizzazioni con fuga della PSR e della WD	5	0.005	0.047

Velocità di rinculo:

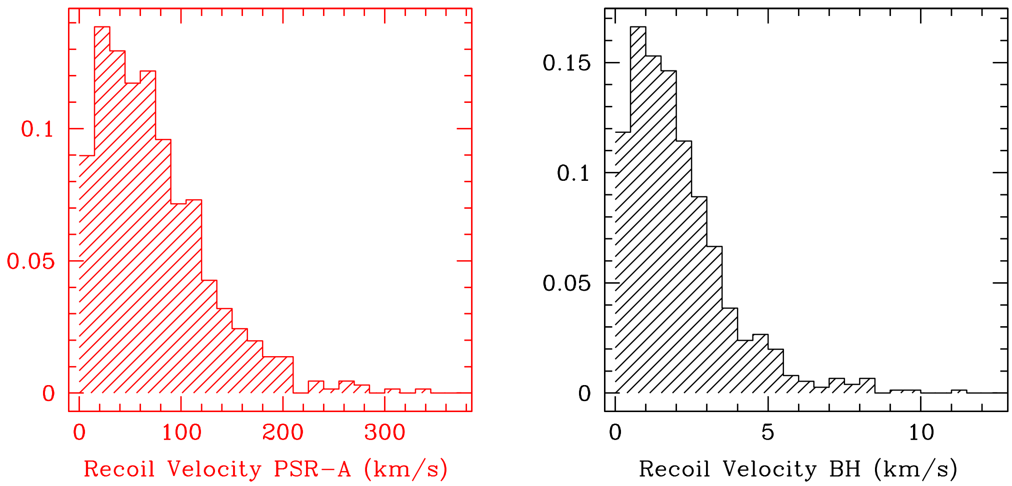
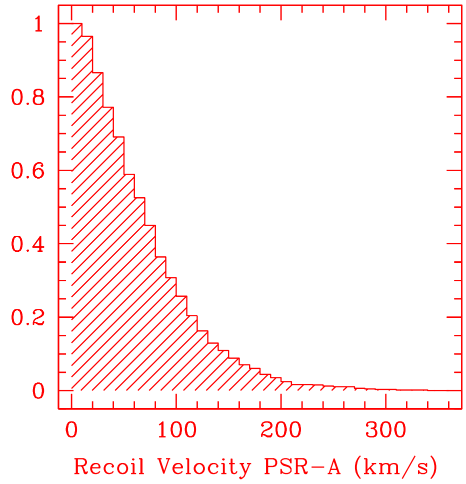


Figura 6.6: $m_1 = 50\, m_\odot$, $m_2 = 10\, m_\odot$. a) Velocità di rinculo della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte, ionizzazioni e sistemi quadrupli legati. b) Velocità di rinculo della binaria di BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e sistemi quadrupli legati.

Senza considerare le R, i SL e le I, ricaviamo[1]

[1] Tutti i valori riportati sono calcolati rispetto al centro di massa dei quattro corpi.



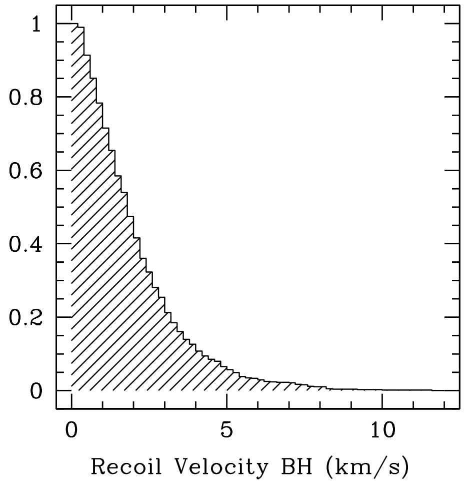


Figura 6.7: $m_1 = 50\,m_\odot$, $m_2 = 10\,m_\odot$. a) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo della PSR-A+co, senza R, I, SL. b) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo del BH trascurando R e SL.

$\langle V_{PSR-A} \rangle$	73.04 ± 52.98 km s^{-1}
$V_{rms\,PSR-A}$	90.23 km s^{-1}
$V_{pp\,PSR-A}$	30 km s^{-1}
$\langle V_{BH} \rangle$	$1.95 \pm\ 1.41$ km s^{-1}
$V_{rms\,BH}$	2.41 km s^{-1}
$V_{pp\,BH}$	0.75 km s^{-1}

dove i simboli sono gli stessi usati nellla Sezione 2.1.a.

La velocità media acquisita dalla PSR-A+co (~ 70 km s^{-1}) è notevolmente più alta della velocità di fuga dall'ammasso. Tuttavia, a causa della forte asimmetria della distribuzione di velocità (Fig. 6.6.a), la velocità più probabile è proprio **30 km s^{-1}**, ossia la velocità richiesta per spiegare l'attuale collocazione della PSR-A+co.

Quando viene ionizzata e fugge all'infinito, la pulsar acquista una velocità di rinculo media pari a 197.45 ± 104.51 km s^{-1}.

Escludendo le R e i SL, per il centro di massa della binaria di BH ricaviamo:

$\langle V_{BH} \rangle$	2.07 ± 1.61 km s^{-1}
$V_{rms\,BH}$	2.62 km s^{-1}
$V_{pp\,BH}$	0.75 km s^{-1}

Eccentricità:

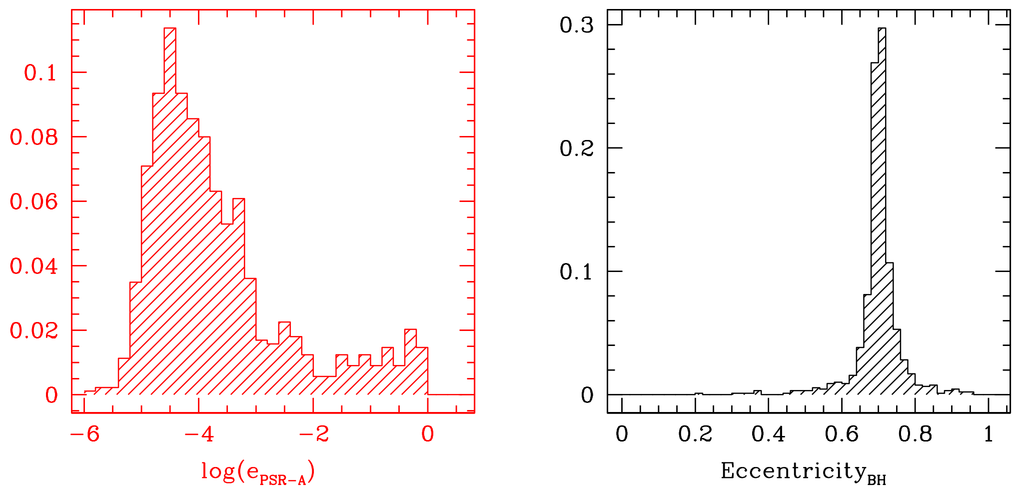


Figura 6.8: $m_1 = 50\,m_\odot$, $m_2 = 10\,m_\odot$. a) Eccentricità finale della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Eccentricità finale della binaria di BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte.

Trascurando le R e le I, le eccentricità finali del sistema risultano.

$\langle e_{PSR-A} \rangle$	$3.02 \cdot 10^{-2} \pm 3.01 \cdot 10^{-2}$
$e_{pp\,PSR-A}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$
$\langle e_{BH} \rangle$	$7.000 \cdot 10^{-1} \pm 2.98 \cdot 10^{-2}$
$e_{pp\,BH}$	$7.00 \cdot 10^{-1}$

dove i simboli sono gli stessi usati nella Sezione 2.1.a.

Anche per il sistema in cui la binaria bersaglio è costituita da due BH di masse rispettivamente 50 e 10 $m_\odot$ si riscontra una grossa differenza tra valore medio e valore più probabile dell'eccentricità finale della PSRA+co, dovuta da una parte all'asimmetria intrinseca della distribuzione, dall'altra alle fluttuazioni statistiche.

Se trascuriamo il valore medio e ci limitiamo a considerare il picco della distribuzione, il valore ricavato per $e_{pp\,PSRA}$ ($\propto 10^{-5}$) indica che la struttura della PSR-A+co non viene alterata in modo significativo neppure dagli scattering con una binaria costituita da due BH di masse $m_1 = 50$, $m_2 = 10\,m_\odot$.

Energia di legame:

Senza le risonanze irrisolte:

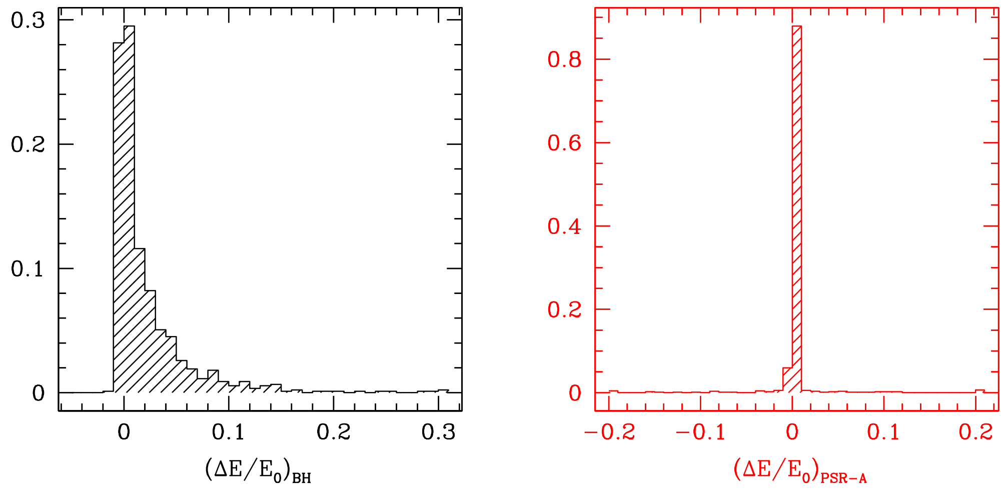


Figura 6.9: $m_1 = 50\,m_\odot$, $m_2 = 10\,m_\odot$. a) Variazione dell'energia di legame del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione dell'energia di legame della PSR-A+co trascurando le risonanze irrisolte.

$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$1.83 \cdot 10^{-2} \pm 7.23 \cdot 10^{-2}$
$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$	$-9.56 \cdot 10^{-2} \pm 2.993 \cdot 10^{-1}$

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni:

$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$2.10 \cdot 10^{-2} \pm 4.08 \cdot 10^{-2}$
$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$	$1.1 \cdot 10^{-3} \pm 4.70 \cdot 10^{-2}$

dove i simboli sono gli stessi usati nella sezione 2.1.a.

Osservazioni:

- Anche in questo caso la variazione media dell'energia di legame del BH che si ottiene considerando anche le ionizzazioni è inferiore rispetto al caso in cui esse vengono trascurate, a causa dell'incidenza dei sistemi tripli formatisi in seguito alle ionizzazioni.

- Il valore negativo della variazione media dell'energia di legame della PSR-A quando si considerano anche le ionizzazioni è dovuto all'incidenza di queste ultime.

- Quando si trascurano le ionizzazioni, l'energia di legame della PSR-A+co rimane pressoché immutata (variazione dello 0.1%). Questo conferma che anche uno scattering con una binaria di (50, 10) $m_\odot$ altera poco i parametri orbitali della PSR-A+co.

Separazione orbitale:

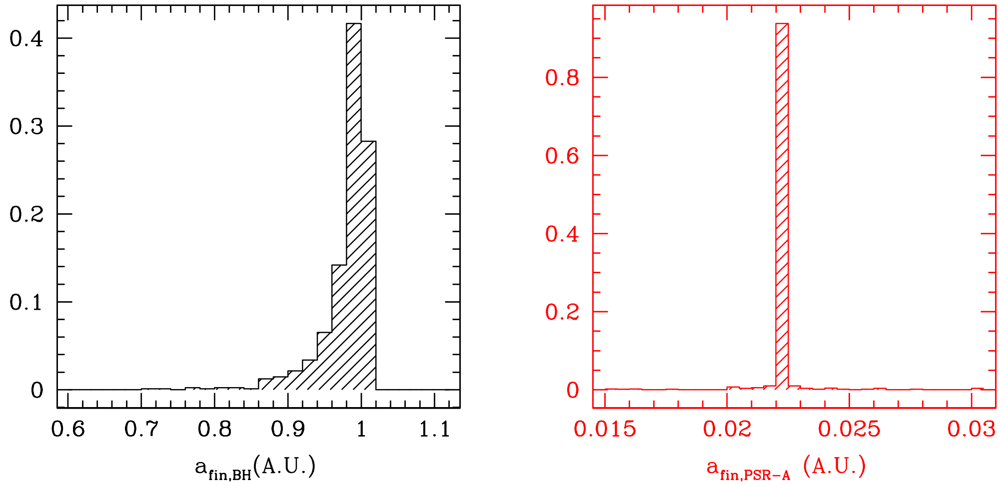


Figura 6.10: $m_1 = 50\,m_\odot$, $m_2 = 10\,m_\odot$. a) Variazione della separazione orbitale del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione della separazione orbitale della PSR-A+co trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni.

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni la variazione media della separazione orbitale della PSR-A+co e della binaria di BH risultano:

$\langle\frac{\Delta a}{a_0}\rangle_{BH}$	$1.9 \cdot 10^{-2} \pm 3.4 \cdot 10^{-2}$
$\langle\mid\frac{\Delta a}{a_0}\mid\rangle_{BH}$	$2.1 \cdot 10^{-2} \pm 2.0 \cdot 10^{-2}$
$\langle\frac{\Delta a}{a_0}\rangle_{PSR-A}$	$-1.4 \cdot 10^{-3} \pm 5.87 \cdot 10^{-2}$
$\langle\mid\frac{\Delta a}{a_0}\mid\rangle_{PSR-A}$	$8.2 \cdot 10^{-3} \pm 8.2 \cdot 10^{-3}$

Osservazioni:

- In modo del tutto analogo a quanto detto per il sistema con $m_1 = 30\,m_\odot$ e $m_2 = 3\,m_\odot$, il semiasse maggiore finale della binaria di BH si stringe circa del 2%; mentre la separazione orbitale della PSR-A+co rimane pressoché immutata (o meglio, si allarga o si stringe in modo equivalente, con una variazione percentuale di un ordine di grandezza inferiore rispetto alla binaria di BH).

6.2.1.c Il sistema $(\mathbf{200\,m_\odot},\ \mathbf{10\,m_\odot})$

La simulazione di 1000 eventi di scattering coinvolgenti una binaria bersaglio con $m_1 = 200\,m_\odot$, $m_2 = 10\,m_\odot$, separazione orbitale $a = 1$ A.U., eccentricità $e = 0.7$, e una binaria proiettile con le caratteristiche della PSR-A+co ha dato i seguenti risultati.

Classificazione degli scattering:

	Numero di eventi	Probabilità
Flyby puri	594	0.594
Ionizzazioni	121	0.121
Risonanze irrisolte	8	0.008
Sistemi finali legati	277	0.277

Le ionizzazioni si possono distinguere in:

	Numero di eventi	Probabilità rispetto al totale degli eventi	Probabilità rispetto al totale delle ionizzazioni
Ionizzazioni risonanti	11	0.011	0.091
Ionizzazioni con fuga della PSR	45	0.045	0.372
Ionizzazioni con fuga della WD	58	0.058	0.479
Ionizzazioni con fuga della PSR e della WD	7	0.007	0.058

Velocità di rinculo:

Senza considerare le R, i SL e le I, ricaviamo[2]

$\langle V_{PSR-A}\rangle$	101.36 ± 61.46 km s^{-1}
$V_{rms\,PSR-A}$	118.54 km s^{-1}
$V_{pp\,PSR-A}$	90 km s^{-1}
$\langle V_{BH}\rangle$	0.77 ± 0.47 km s^{-1}
$V_{rms\,BH}$	0.90 km s^{-1}
$V_{pp\,BH}$	0.6 km s^{-1}

[2]Tutti i valori riportati sono calcolati rispetto al centro di massa dei quattro corpi.

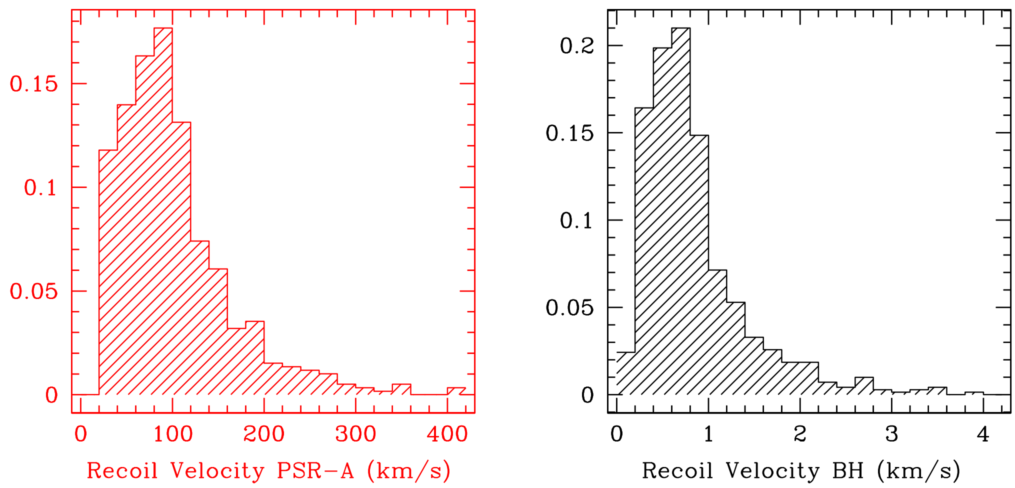


Figura 6.11: $m_1 = 200\,m_\odot$, $m_2 = 10\,m_\odot$. a) Velocità di rinculo della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte, ionizzazioni e sistemi quadrupli legati. b) Velocità di rinculo della binaria di BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e sistemi quadrupli legati.

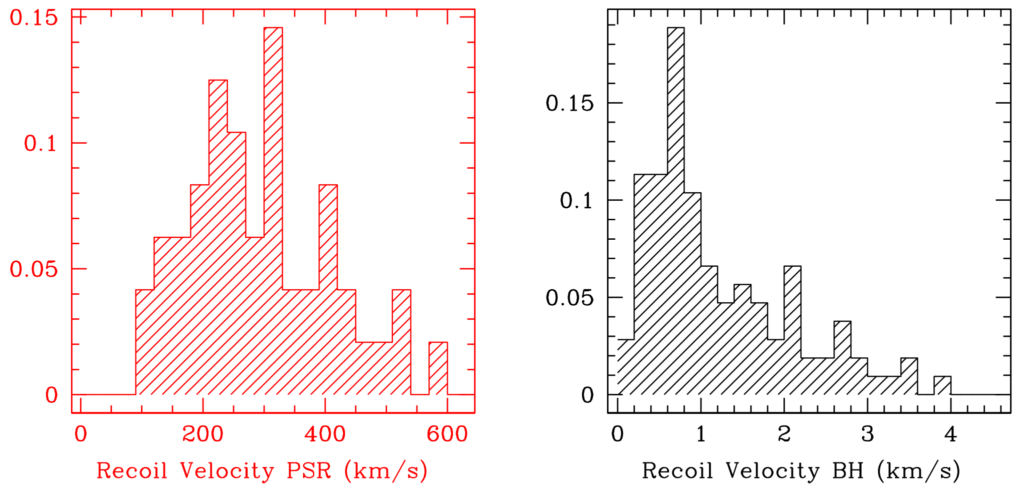


Figura 6.12: $m_1 = 200\,m_\odot$, $m_2 = 10\,m_\odot$. a) Velocità di rinculo della pulsar considerando soltanto i casi in cui viene ionizzata. b) Velocità di rinculo della binaria di BH considerando soltanto le ionizzazioni.

dove i simboli sono gli stessi usati usati nella Sezione 2.1.a.

Rispetto ai due sistemi, molto meno massivi, precedentemente analizzati, la binaria con $m_1 = 200\,m_\odot$ $m_2 = 10\,m_\odot$ impartisce alla pulsar una velocità

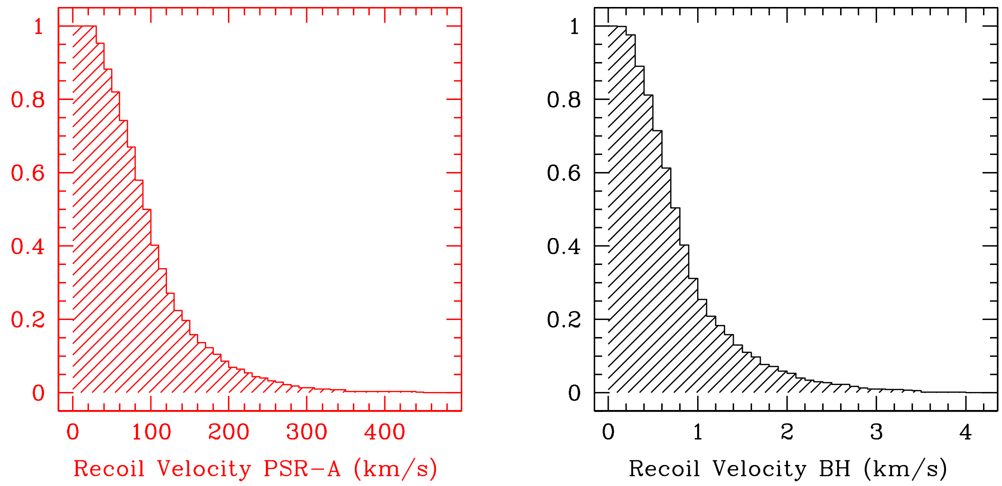


Figura 6.13: $m_1 = 200\, m_\odot$, $m_2 = 10\, m_\odot$. a) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo della PSR-A+co, senza R, I, SL. b) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo del BH trascurando R e SL.

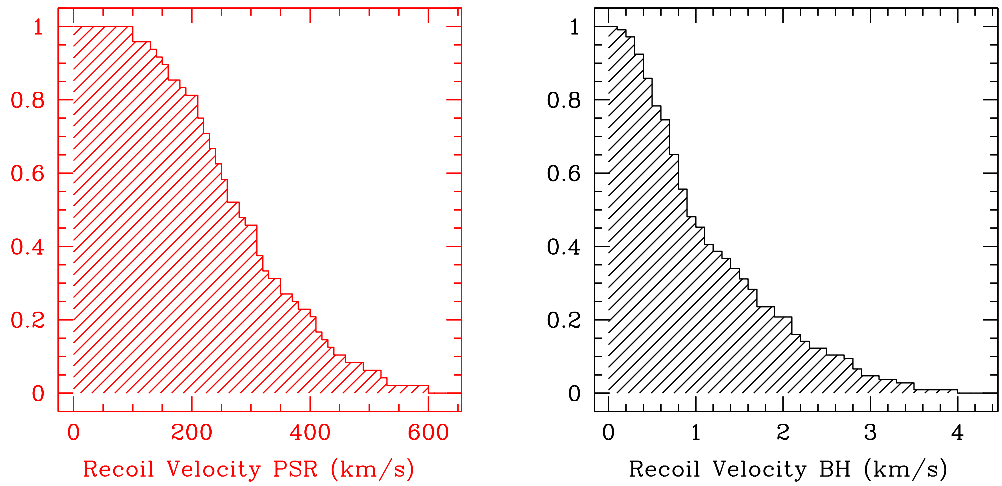


Figura 6.14: $m_1 = 200\, m_\odot$, $m_2 = 10\, m_\odot$. a) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo della pulsar considerando solo le ionizzazioni. b) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo del BH considerando solo le ionizzazioni.

di rinculo notevolmente elevata. Considerando sia il valore medio che il valore più probabile, la velocità finale acquisita dalla PSR-A+co è dell'ordine di 100 $\mathrm{km\,s^{-1}}$, molto più alta della velocità di fuga dall'ammasso.

Tuttavia l'espulsione della PSR-A+co da parte di una binaria di questo tipo non può essere completamente scartata. Infatti per circa il 12% (Fig.6.11) degli scattering utili la velocità finale della PSR-A+co è compresa tra 20 e 40 $\mathrm{km\,s^{-1}}$.

Quando viene ionizzata e fugge all'infinito, la pulsar acquista una velocità di rinculo media pari a $291.07 \pm 115.67\ \mathrm{km\,s^{-1}}$.

Escludendo le R e i SL, per il centro di massa della binaria di BH ricaviamo:

$\langle V_{BH} \rangle$	$0.84 \pm 0.57\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
$V_{rms\,BH}$	$1.01\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
$V_{pp\,BH}$	$0.7\ \mathrm{km\,s^{-1}}$

Eccentricità:

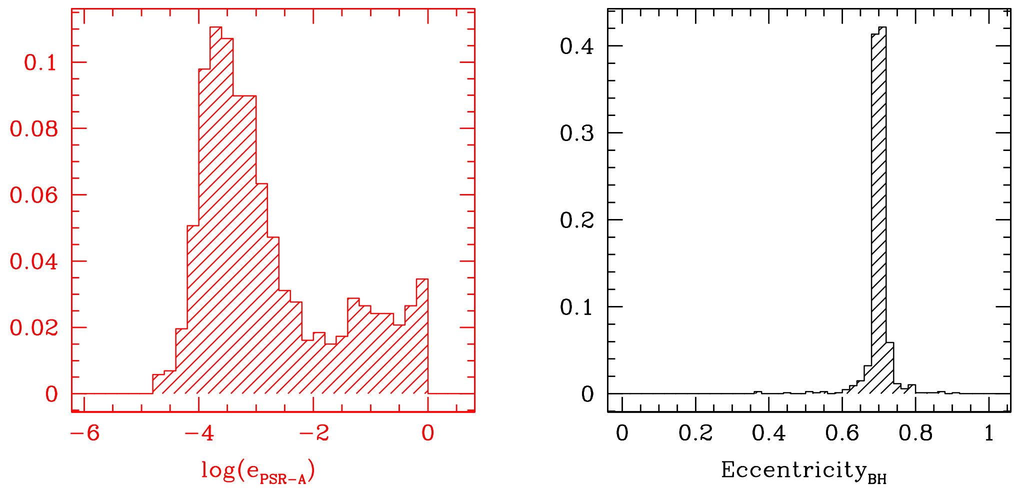


Figura 6.15: $m_1 = 200 m_\odot$, $m_2 = 10 m_\odot$. a) Eccentricità finale della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Eccentricità finale della binaria di BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte.

Trascurando le R e le I, le eccentricità finali del sistema risultano.

$\langle e_{PSR-A} \rangle$	$5.99 \cdot 10^{-2} \pm 5.97 \cdot 10^{-2}$
$e_{pp\,PSR-A}$	$1.99{\cdot}10^{-4}$
$\langle e_{BH} \rangle$	$7.003 \cdot 10^{-1} \pm 1.18 \cdot 10^{-2}$
$e_{pp\,BH}$	0.7

dove i simboli sono gli stessi usati nella Sezione 2.1.a.

Anche per il sistema in cui la binaria bersaglio è costituita da due BH di masse $(200, 10)m_\odot$ si riscontra una grossa differenza tra valore medio e valore più probabile dell'eccentricità finale della PSR-A+co, dovuta all'asimmetria intrinseca della distribuzione ed alle fluttuazioni statistiche.

Se ci limitiamo a considerare il picco della distribuzione ($e_{pp\,PSRA} \propto 10^{-4}$), anche una binaria bersaglio così massiva altera solo di un fattore 10 l'eccentricità della PSR-A+co.

Energia di legame:

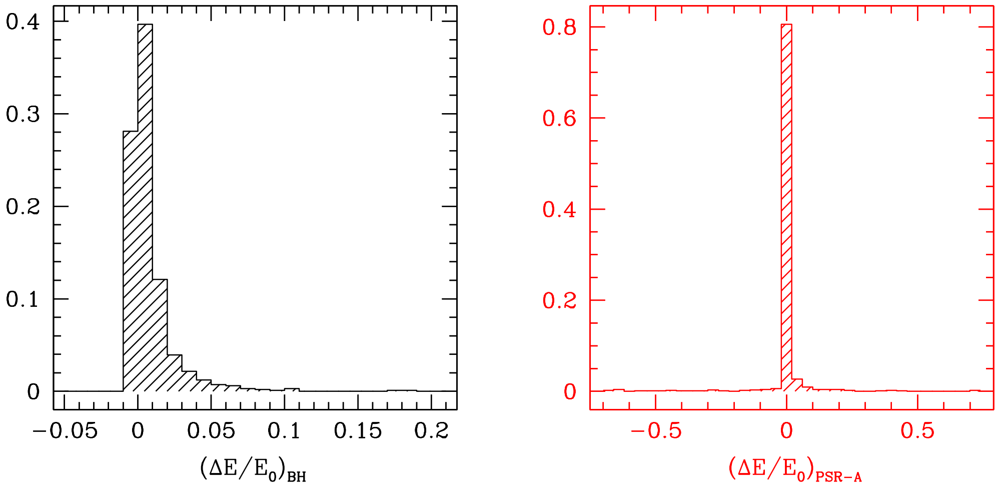


Figura 6.16: $m_1 = 200m_\odot$, $m_2 = 10m_\odot$. a) Variazione dell'energia di legame del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione dell'energia di legame della PSR-A+co trascurando le risonanze irrisolte.

Senza le risonanze irrisolte:

$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$6.82 \cdot 10^{-3} \pm 2.88 \cdot 10^{-2}$
$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$	$-1.14 \cdot 10^{-1} \pm 3.26 \cdot 10^{-1}$

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni:

$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$7.7 \cdot 10^{-3} \pm 1.67 \cdot 10^{-2}$
$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$	$-2.4 \cdot 10^{-3} \pm 9.29 \cdot 10^{-2}$

dove i simboli sono gli stessi usati nella Sezione 2.1.a.

Osservazioni:

- Anche in questo caso la variazione media dell'energia di legame del BH che si ottiene considerando anche le ionizzazioni è inferiore rispetto al caso in cui esse vengono trascurate a causa dell'incidenza dei sistemi tripli formatisi in seguito alle ionizzazioni.
- La variazione media dell'energia di legame della PSR-A+co è sempre negativa: le ionizzazioni per un sistema così massivo cominciano ad essere importanti.
- Quando si trascurano le ionizzazioni, l'energia di legame della PSR-A+co rimane pressoché immutata (variazione dello 0.2%): anche lo scattering con una binaria bersaglio così massiva altera di poco i parametri orbitali della PSR-A+co.

Separazione orbitale:

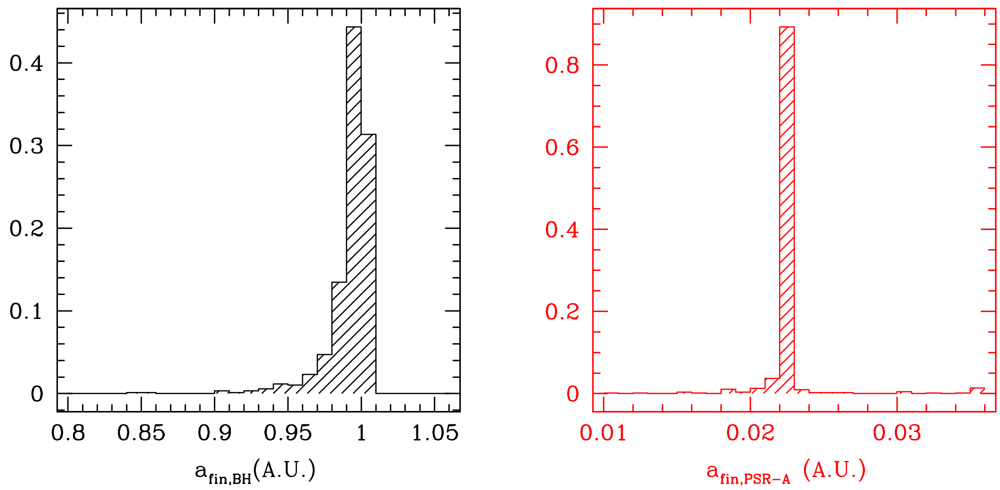


Figura 6.17: $m_1 = 200 m_\odot$, $m_2 = 10 m_\odot$. a) Variazione della separazione orbitale del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione della separazione orbitale della PSR-A+co trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni.

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni la variazione media della separazione orbitale della PSR-A+co e della binaria di BH risultano:

$\langle \frac{\Delta a}{a_0} \rangle_{BH}$	$7.3 \cdot 10^{-3} \pm 1.54 \cdot 10^{-2}$
$\langle \mid \frac{\Delta a}{a_0} \mid \rangle_{BH}$	$9.1 \cdot 10^{-3} \pm 7.7 \cdot 10^{-3}$
$\langle \frac{\Delta a}{a_0} \rangle_{PSR-A}$	$-1.7 \cdot 10^{-2} \pm 1.88 \cdot 10^{-1}$
$\langle \mid \frac{\Delta a}{a_0} \mid \rangle_{PSR-A}$	$3.1 \cdot 10^{-2} \pm 3.1 \cdot 10^{-2}$

Osservazioni:

- Il semiasse maggiore finale della binaria di BH si stringe all'incirca dell'1%, mentre quello della PSR-A+co tende ad allargarsi dell'1%. Quindi l'interazione non ha conseguenze drammatiche sulla binaria proiettile, anche se la sua separazione orbitale viene alterata di un fattore 10 in più rispetto al caso delle binarie bersaglio più leggere.

Considerazioni finali sulle binarie di BH:

Nella seguente tabella riassumiamo i principali risultati emersi dalle simulazioni per tutti i sistemi considerati.

	$(30\, m_\odot,\, 3\, m_\odot)$	$(50\, m_\odot,\, 10\, m_\odot)$	$(200\, m_\odot,\, 10\, m_\odot)$
Probabilità di ionizzazione	0.083	0.107	0.121
$\langle V_{PSR-A} \rangle$ ($\mathrm{km\, s^{-1}}$)	34.73 ± 29.01	73.04 ± 52.98	101.36 ± 61.46
$V_{pp\, PSR-A}$ ($\mathrm{km\, s^{-1}}$)	15	30	90
$\langle V_{BH} \rangle$ ($\mathrm{km\, s^{-1}}$)	1.85 ± 1.60	2.07 ± 1.61	0.84 ± 0.57
$\langle e_{PSR-A} \rangle$	$2.09 \cdot 10^{-2} \pm 2.09 \cdot 10^{-2}$	$3.02 \cdot 10^{-2} \pm 3.01 \cdot 10^{-2}$	$5.99 \cdot 10^{-2} \pm 5.97 \cdot 10^{-2}$
$e_{pp\, PSR-A}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{BH}$	$2.70 \cdot 10^{-2} \pm 8.64 \cdot 10^{-2}$	$2.10 \cdot 10^{-2} \pm 4.10 \cdot 10^{-2}$	$7.7 \cdot 10^{-3} \pm 1.67 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{PSR-A}$	$6.2 \cdot 10^{-3} \pm 1.114 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-3} \pm 4.70 \cdot 10^{-2}$	$-2.4 \cdot 10^{-3} \pm 9.29 \cdot 10^{-2}$

VELOCITÀ: La velocità di espulsione della PSR-A+co è ampiamente *compatibile con quella richiesta per rimanere nell'ammasso globulare per tutti i sistemi considerati*, a parte la binaria con $(m_1 = 200\, m_\odot,\, m_2 = 10\, m_\odot)$. Anche in quest'ultimo caso, tuttavia, la frazione di eventi con $v_{PSR-A} \in [20,\, 40]\ \mathrm{km\, s^{-1}}$ è superiore al 10%.

IONIZZAZIONI: In generale il numero di ionizzazioni è abbastanza basso ($\sim 10\%$) anche per le binarie più massive. Quindi per la PSR-A+co ci sono buone probabilità di essere uscita indenne dallo scattering. Tuttavia, quando la ionizzazione si verifica, la velocità acquisita dalla pulsar è tale da provocarne l'espulsione dall'ammasso nella quasi totalità dei casi. Pertanto, siamo propensi ad escludere che le 4 pulsar a millisecondo presenti in NGC 6752 e non appartenenti ad alcun sistema binario siano state ionizzate in seguito ad uno scattering con una binaria di BH. La ionizzazione di queste pulsar è, probabilmente, da imputare a incontri gravitazionali con stelle dell'ammasso.

ECCENTRICITÀ: Tutti i sistemi considerati tendono a preservare l'eccentricità iniziale della binaria entro un fattore 10.

ENERGIA di LEGAME della PSR-A+co: La variazione dell'energia di legame (e conseguentemente della separazione orbitale) della PSR-A+co è in tutti i casi trascurabile (dell'ordine di 1 su 1000). Questa circostanza, unitamente a quanto detto per il numero di ionizzazioni e l'eccentricità, ci assicura che uno scattering con una binaria di BH non altera profondamente i parametri orbitali della PSR-A+co.

ENERGIA di LEGAME della binaria di BH: La variazione dell'energia di legame della binaria di BH verifica, anche se con una certa differenza tra i 3 sistemi considerati, la relazione (2.68). Infatti:

(m_1, m_2) $(m_\odot)$	$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$\frac{(m_3+m_4)}{(m_1+m_2)}$	ξ
(30,3)	$2.7{\cdot}10^{-2}$	$4.8{\cdot}10^{-2}$	0.56
(50,10)	$2.1{\cdot}10^{-2}$	$2.7{\cdot}10^{-2}$	0.78
(200,10)	$7.7{\cdot}10^{-3}$	$7.6{\cdot}10^{-3}$	1.01

Il valore di ξ risulta sempre $\sim \mathbf{1}$, e mostra una tendenza ad aumentare al crescere della massa della componente più massiva della binaria di BH.

Conclusioni

- Dall'analisi delle simulazioni i due sistemi meno massivi tra quelli considerati sembrano favoriti come responsabili dell'espulsione della PSR-A+co.

- Inoltre, alcuni studi sulla massa dei BH di origine stellare (che tendono a escludere la formazione di BH di 3 $m_\odot$, mentre prevedono la formazione di BH di 10 $m_\odot$) da una parte, ed alcune considerazioni sulla facilità con cui una binaria di BH meno massiva di 50-60 $m_\odot$ potrebbe essere espulsa dall'ammasso dall'altra (Miller & Hamilton 2002 [66]), ci portano a **preferire il sistema con** $(\mathbf{m_1 = 50\, m_\odot}, \mathbf{m_2 = 10\, m_\odot})$ **rispetto a quello con** $(\mathbf{m_1 = 30\, m_\odot}, \mathbf{m_2 = 3\, m_\odot})$.

- Tuttavia anche un sistema più massivo, come quello con $(m_1 = 200\, m_\odot, m_2 = 10\, m_\odot)$, non può essere escluso sulla base dei risultati delle simulazioni. Inoltre, tenendo conto della proporzionalità esistente tra velocità acquisita nello scattering e semiasse maggiore della binaria di BH (eq. 5.63), è ragionevole pensare di poter **abbassare il range delle velocità di espulsione aumentando opportunamente la separazione orbitale**.
  Pertanto, il secondo passo di questo lavoro di Tesi consiste proprio nel considerare scattering coinvolgenti una binaria con $(m_1 = 200\, m_\odot, m_2 = 10\, m_\odot)$, ma diverse separazioni orbitali, comprese tra 1 e 7 A.U..

La velocità di espulsione al variare del semiasse maggiore

Fissata una binaria di BH con ($m_1 = 200\, m_\odot$, $m_2 = 10\, m_\odot$), abbiamo simulato 1000 scattering per ciascuna delle seguenti separazioni orbitali: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 A.U..
I risultati delle simulazioni sono riassunti nella seguente tabella.

Separazione orbitale (A.U.)	$\langle V \rangle_{\text{PSR-A}}$ (km s^{-1})	$\langle V \rangle_{BH}$ (km s^{-1})
1	101.36 ± 61.45	0.77 ± 0.47
2	86.56 ± 49.19	0.66 ± 0.37
3	72.24 ± 37.29	0.55 ± 0.28
4	65.31 ± 31.52	0.50 ± 0.24
5	58.04 ± 26.78	0.44 ± 0.20
6	57.64 ± 29.02	0.44 ± 0.22
7	55.83 ± 30.72	0.42 ± 0.23

dove i valori delle velocità medie sono ricavati trascurando le ionizzazioni, le risonanze irrisolte e i sistemi legati. Dalla tabella si può vedere come il valore della velocità di espulsione diminuisce rapidamente al crescere del semiasse maggiore. Questa tendenza viene confermata osservando (Fig. 6.18) i grafici della velocità di espulsione in funzione del semiasse maggiore iniziale della binaria di buchi neri.

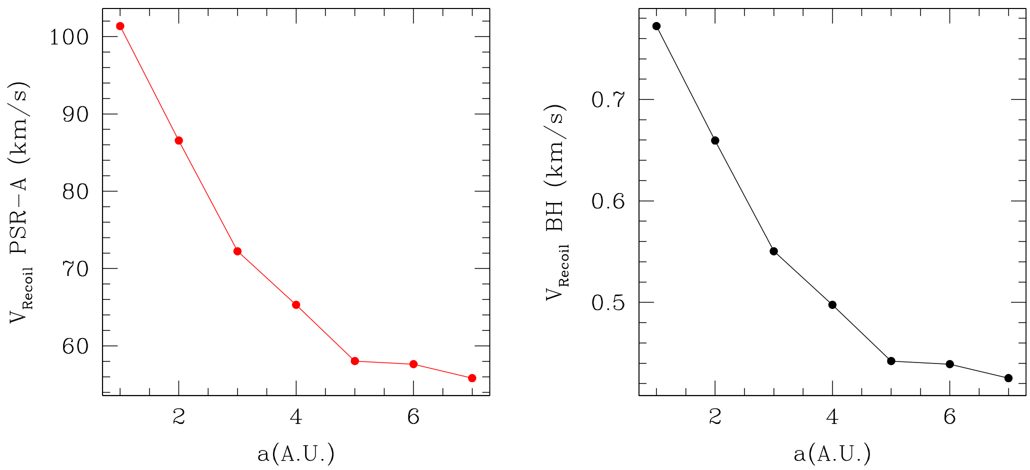


Figura 6.18: Andamento della velocità di rinculo della PSR-A (a sinistra) e del BH (a destra) in funzione della separazione orbitale iniziale.

Dai grafici si vede come la velocità di espulsione, v_{ej}, inizialmente cali rapidamente al crescere della separazione orbitale, a, per poi attestarsi su un valore quasi costante $v_{ej} \sim 55 - 56$ km s^{-1}. Eseguendo un fit lineare con Smongo (Fig. 6.19) si trova che

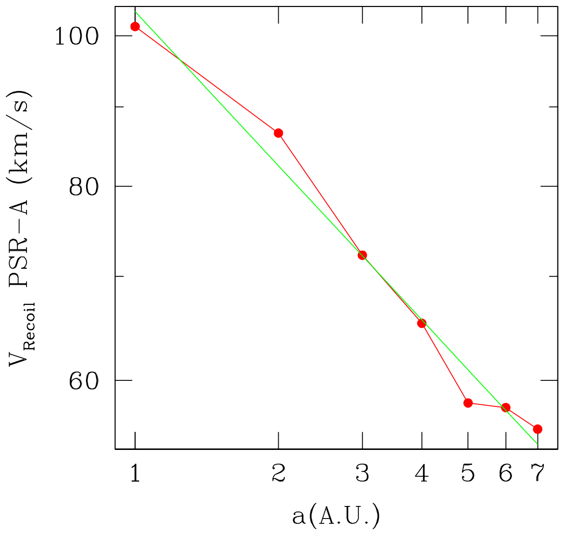


Figura 6.19: Andamento di Log(v(t)) in funzione di Log(a(t))(*rosso*) e fit lineare (*verde*).

$$\begin{aligned} &\log v_{ej} = -\alpha \log a + \beta \\ &\text{dove} \quad \alpha = 0.33 \pm 0.02 \quad \beta = 2.015 \pm 0.012 \end{aligned} \tag{6.1}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} &v_{ej} \simeq K \quad a^{-0.33} \\ &\text{dove} \quad K = 103.5 \pm 1.2 \,\mathrm{km\,s^{-1}} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Quindi la velocità di rinculo scala approssimativamente come $a^{-1/3}$. Nell'equazione 5.63 avevamo previsto approssimativamente $v_{ej} \propto a^{-1/2}$, che indica una dipendenza leggermente più "steep" rispetto al risultato del fit.

Mentre la velocità si riduce, altre caratteristiche (come il numero di ionizzazioni e l'eccentricità finale della PSR-A+co) rimangono pressoché invariate.

6.2.2 Il singolo BH

Ammettendo che esista un BH singolo di massa intermedia e che possa crearsi un cusp di stelle come quello descritto nel Capitolo 3, sono due i punti critici che rimangono da affrontare per poter effettuare delle simulazioni.

1. In primo luogo ci si deve chiedere quale potrebbe essere la massa di un BH centrale in NGC 6752. Come accennato al Cap.4, la massa centrale non luminosa stimata da Ferraro et al. è $\gtrsim 3700\, m_{\odot}$. Tuttavia, poiché è ragionevole pensare che tale massa centrale sia costituita non solo da un singolo BH, ma anche da altri BH di massa inferiore, da stelle di neutroni e da nane bianche, la massa del BH centrale sarà inferiore a questo valore. Se, come sembrano indicare le recenti scoperte di Gebhardt et al. (2002) [36] e Gerssen et al. (2002) [37], anche i BH al centro degli ammassi globulari obbediscono alla correlazione $M - \sigma$ (si veda l'Appendice A), il buco nero in NGC 6752 (dove la velocità di dispersione è ~ 7 km s^{-1}), dovrebbe avere una massa dell'ordine di $200 - 600\, m_{\odot}$ (Fig. 6.20). Per questo abbiamo scelto $m = 500\, m_{\odot}$.

2. Il nostro codice integra interazioni binaria-binaria. Ma nel caso del singolo BH la PSR-A+co si trova davanti non una binaria isolata, bensì un buco nero con un cusp formato da più di 100 stelle. L'interazione in grado di provocare l'espulsione della pulsar binaria può essere soltanto un'interazione ravvicinata con una singola stella del cusp; tuttavia è lecito chiedersi se la presenza delle altre stelle del cusp potrebbe perturbare significativamente il moto della PSR-A prima e dopo lo scattering. Se le perturbazioni dovute al cusp fossero troppo rilevanti, i risultati del nostro codice non avrebbero validità dal punto di vista fisico. Per risolvere la questione, abbiamo confrontato tra di loro i tempi scala dei processi coinvolti, ossia il periodo orbitale della stella del cusp con cui avviene l'interazione ravvicinata (τ_{orb}), il tempo scala di tale interazione ravvicinata (τ_{coll}) e il tempo scala di rilassamento al raggio di influenza del BH (τ_{relax}), che tiene conto anche delle interazioni distanti con altre stelle del cusp.

$$\tau_{orb} = 2\pi \left(\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)} \right)^{1/2} = 16.3\,\mathrm{giorni} \left(\frac{a}{1\,\mathrm{A.U.}} \right)^{3/2} \left(\frac{501\, m_{\odot}}{(m_1 + m_2)} \right)^{1/2}$$

dove a = separazione orbitale, m_1= massa del BH, m_2= massa della stella del cusp coinvolta nello scattering ravvicinato.

$$\tau_{coll} = \frac{p}{\sigma} \simeq \frac{a}{\sigma} = 248\,\mathrm{giorni} \left(\frac{a}{1\,\mathrm{A.U.}} \right) \left(\frac{\sigma}{7\mathrm{km\,s^{-1}}} \right)$$

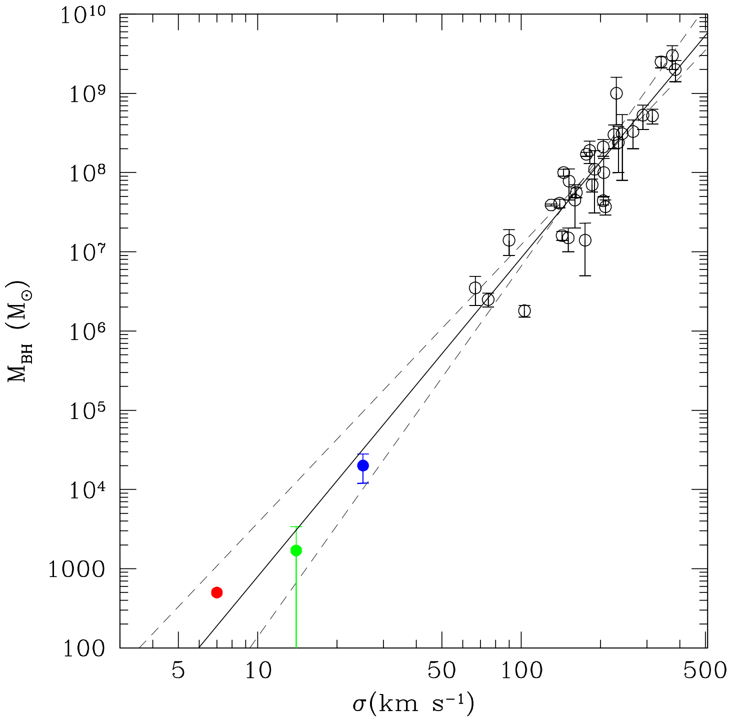


Figura 6.20: Posizione nel piano $\log M_{BH} - \log \sigma$ dei buchi neri rivelati in nuclei galattici(*cerchi vuoti*) e dei due eventuali BH scoperti in G1 (*cerchio blu*) e in M15 (*cerchio verde*). Il *cerchio rosso* indica un BH di massa $500 m_\odot$ in corrispondenza di una velocità di dispersione pari a 7 $\mathrm{km\,s^{-1}}$ (quella misurata per NGC 6752).

dove p è la distanza di massimo avvicinamento ($p \sim a$ per il tipo di interazioni che stiamo considerando).

$$\tau_{relax} = 0.34 \frac{\sigma^3}{G^2\, n\, m^2 \ln \Lambda} \sim 5.6 \cdot 10^6 \,\text{anni} \left(\frac{\sigma}{7\,\mathrm{km\,s^{-1}}} \right)^3 \left(\frac{m_\odot}{m} \right)^2 \left(\frac{10^5\,\mathrm{pc^{-3}}}{n} \right)$$

dove σ è la velocità di dispersione, n la densità stellare nel core, m la massa caratteristica delle stelle, $\ln \Lambda$ il logaritmo coulombiano (≈ 10). Poiché $\tau_{orb} < \tau_{coll} \ll \tau_{relax}$, siamo autorizzati a considerare il nostro sistema (BH + stella del cusp + PSR-A + co) isolato dal resto del cusp.

6.2.2.a Binaria PSR-A+co

Esaminiamo i risultati di due gruppi di simulazioni coinvolgenti un singolo BH + cusp (con $m_1 = 500\, m_\odot$, $m_2 = 1\, m_\odot$, eccentricità $e = 0.7$), e una binaria proiettile con le caratteristiche della PSR-A dopo la fase di recycling (PSR-A+co):

- 1000 simulazioni effettuate scegliendo come separazione orbitale tra la stella del cusp e il BH $a = 1$ A.U..
- 1000 simulazioni efffettuate scegliendo $a = 3$ A.U..

SEPARAZIONE ORBITALE 1 A.U.

Classificazione degli scattering:

Gli esiti degli scattering simulati sono riportati nella seguente tabella.

	Numero di eventi	Probabilità
Flyby puri	452	0.452
Ionizzazioni	273	0.273
Risonanze irrisolte	3	0.003
Sistemi finali legati	272	0.272

	Numero di eventi	Probabilità rispetto al totale degli eventi	Probabilità rispetto al totale delle ionizzazioni
Ionizzazioni risonanti	1	0.001	0.004
Ionizzazioni con fuga della PSR	133	0.133	0.487
Ionizzazioni con fuga della WD	134	0.134	0.491
Ionizzazioni con fuga della PSR e della WD	5	0.005	0.018

Velocità di rinculo:

Senza considerare le R, i SL e le I, le velocità di espulsione risultano:

$\langle V_{PSR-A} \rangle$	54.58 ± 19.11 km s^{-1}
$V_{rms\,PSR-A}$	57.83 km s^{-1}
$V_{pp\,PSR-A}$	45 km s^{-1}
$\langle V_{BH} \rangle$	$1.74 \cdot 10^{-1} \pm 6.1 \cdot 10^{-2}$ km s^{-1}
$V_{rms\,BH}$	$1.85 \cdot 10^{-1}$ km s^{-1}
$V_{pp\,BH}$	$1.15 \cdot 10^{-1}$ km s^{-1}

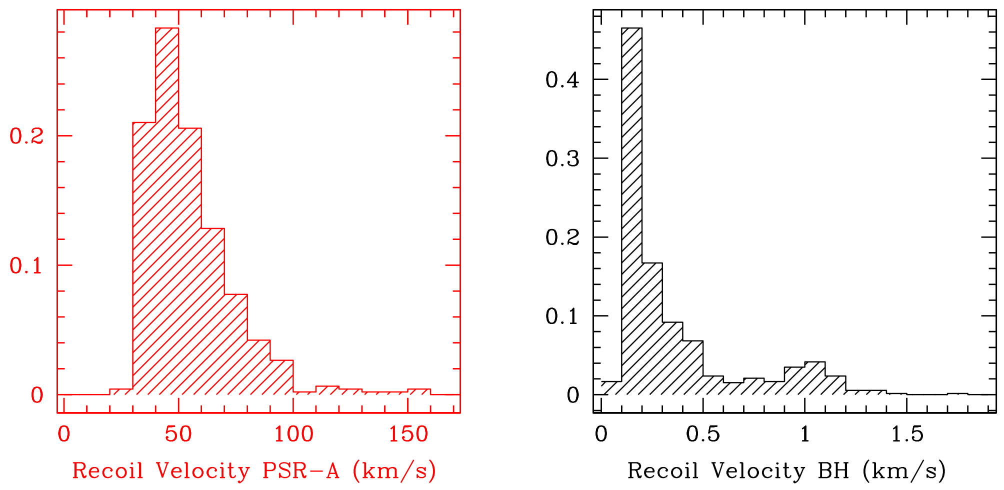


Figura 6.21: $m_1 = 500\, m_\odot$, $m_2 = 1\, m_\odot$, $a = 1\,$A.U. a) Velocità di rinculo della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte, ionizzazioni e sistemi quadrupli legati. b) Velocità di rinculo del BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e sistemi quadrupli legati.

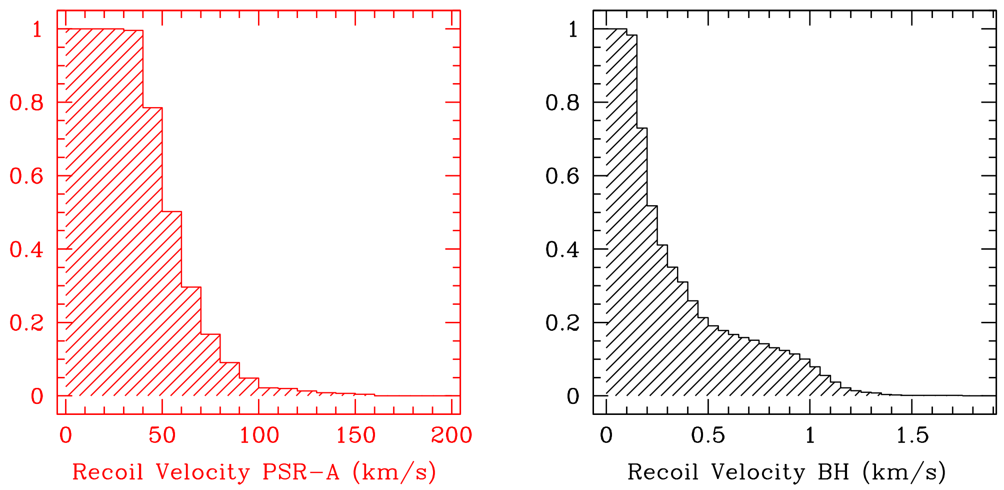


Figura 6.22: $m_1 = 500\, m_\odot$, $m_2 = 1\, m_\odot$, $a = 1\,$A.U. a) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo della PSR-A+co, senza R, I, SL. b) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo del BH trascurando R e SL.

dove i simboli utilizzati sono gli stessi definiti nella Sezione 2.1.a.

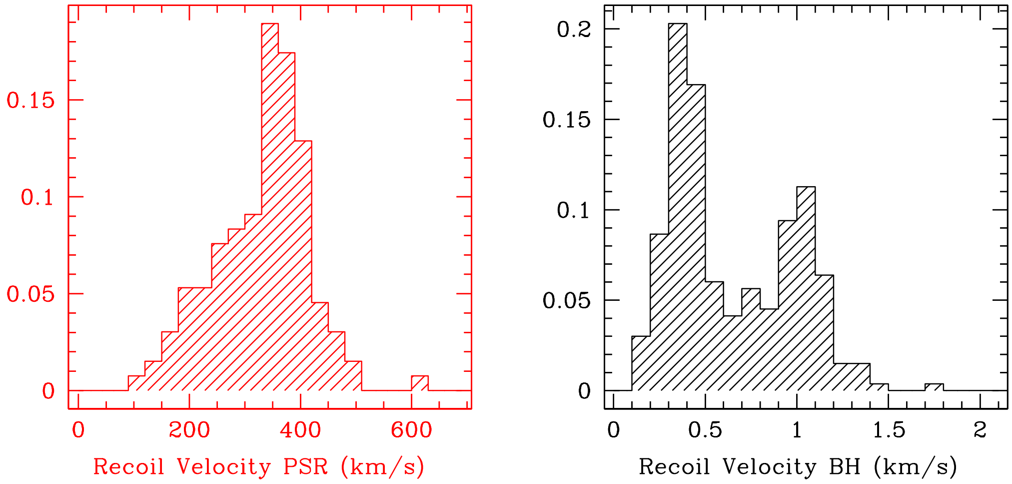


Figura 6.23: $m_1 = 500\, m_\odot$, $m_2 = 1\, m_\odot$, $a = 1\,$A.U. a) Velocità di rinculo della PSR quando viene ionizzata e fugge all'infinito. b) Velocità di rinculo del BH considerando soltanto le ionizzazioni. Si noti la presenza di due picchi distinti, un picco, a $\sim 0.3 - 0.4\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, dovuto alle ionizzazioni in cui fugge all'infinito la WD; l'altro, a $\sim 1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, dovuto alle ionizzazioni in cui fugge all'infinito la PSR.

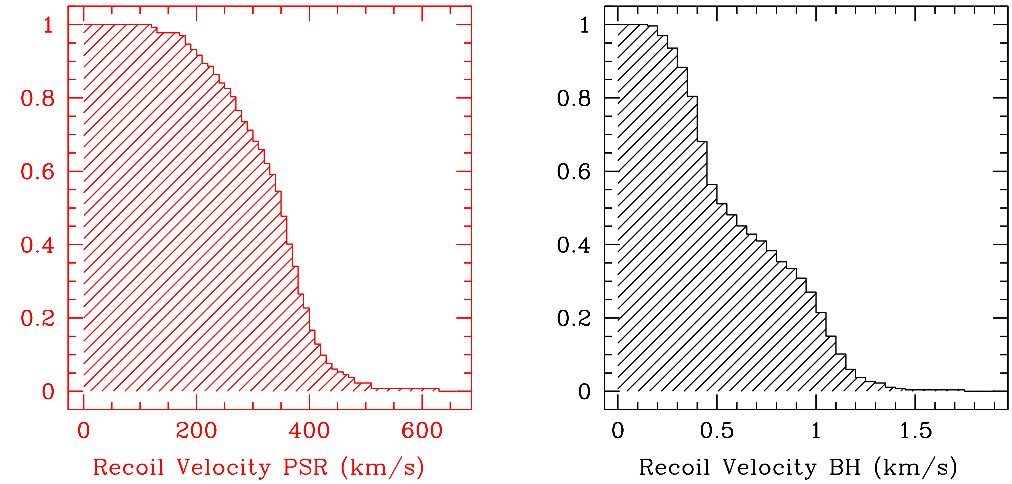


Figura 6.24: $m_1 = 500\, m_\odot$, $m_2 = 1\, m_\odot$, $a = 1\,$A.U. a) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo della PSR, quando viene ionizzata e fugge all'infinito. b) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo del BH considerando solo le ionizzazioni.

Quando viene ionizzata e fugge all'infinito, la pulsar acquista una velocità di rinculo media pari a $331.23 \pm 84.20\ \mathrm{km\,s^{-1}}$.

Escludendo le R e i SL, per il centro di massa della binaria di BH ricaviamo:

$\langle V_{BH} \rangle$	$3.5 \cdot 10^{-1} \pm 3.0 \cdot 10^{-1}$ km s^{-1}
$V_{rms\,BH}$	$4.65 \cdot 10^{-1}$ km s^{-1}
$V_{pp\,BH}$	$1.15 \cdot 10^{-1}$ km s^{-1}

Eccentricità:

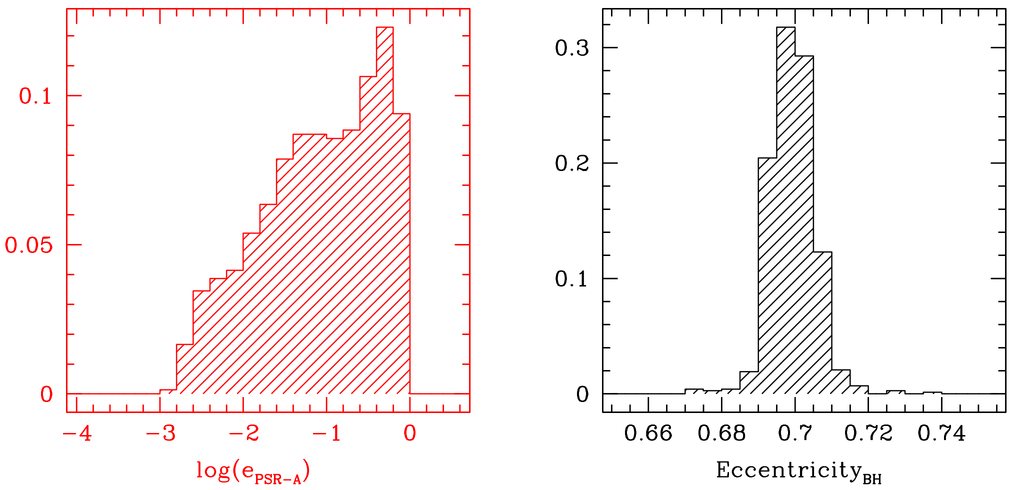


Figura 6.25: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a = 1$ A.U. a) Eccentricità finale della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Eccentricità finale del BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte.

Trascurando le R e le I, le eccentricità finali del sistema risultano.

$\langle e_{PSR-A} \rangle$	$2.16 \cdot 10^{-1} \pm 2.07 \cdot 10^{-1}$
$e_{pp\,PSR-A}$	$3.16 \cdot 10^{-1}$
$\langle e_{BH} \rangle$	$6.994 \cdot 10^{-1} \pm 5.5 \cdot 10^{-3}$
$e_{pp\,BH}$	$6.98 \cdot 10^{-1}$

dove i simboli sono gli stessi usati nella Sezione 2.1.a.

L'eccentricità della PSR-A+co nel caso dello scattering con un singolo BH risulta completamente stravolta, sia considerando il valore medio sia considerando il valore più probabile.

Energia di legame:

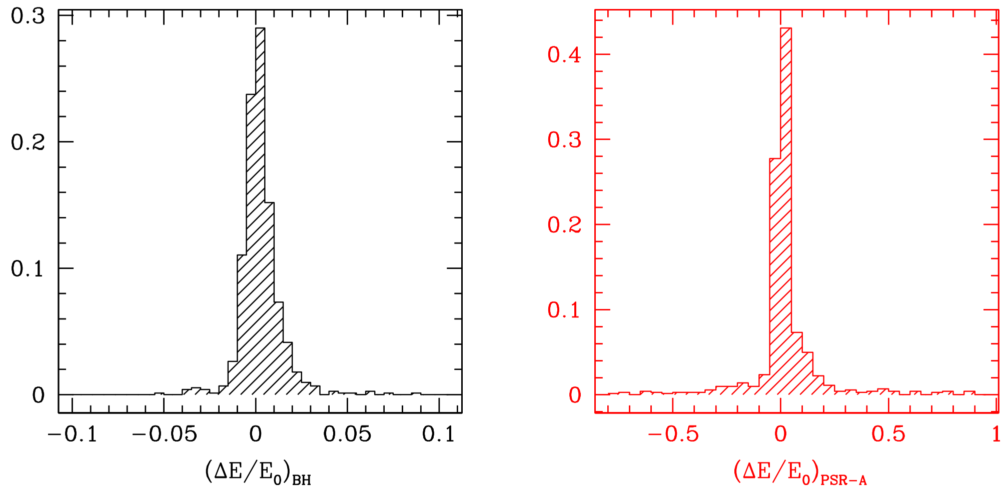


Figura 6.26: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a = 1\,\mathrm{A.U.}$ a) Variazione dell'energia di legame del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione dell'energia di legame della PSR-A+co trascurando le risonanze irrisolte.

Senza le risonanze irrisolte:

$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$1.0 \cdot 10^{-3} \pm 1.66 \cdot 10^{-2}$
$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$	$-2.59 \cdot 10^{-1} \pm 4.74 \cdot 10^{-1}$

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni:

$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$2.6 \cdot 10^{-3} \pm 1.10 \cdot 10^{-2}$
$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$	$1.9 \cdot 10^{-2} \pm 1.58 \cdot 10^{-1}$

dove $\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$ e $\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$ rappresentano la variazione dell'energia di legame rispettivamente della binaria di BH e della PSR-A+co.

Osservazioni:

- Il valore negativo della variazione media dell'energia di legame della PSR-A quando si considerano anche le ionizzazioni è dovuto proprio all'incidenza di queste ultime.

- Quando si trascurano le ionizzazioni, la variazione dell'energia di legame della PSR-A+co ($\sim$ 2%) è maggiore rispetto al caso del BH binario ($\sim$ 0.6%). Questo conferma l'idea, emersa già dall'analisi delle eccentricità finali, che uno scattering con un BH singolo particolarmente massivo altera notevolmente i parametri orbitali della PSR-A+co.

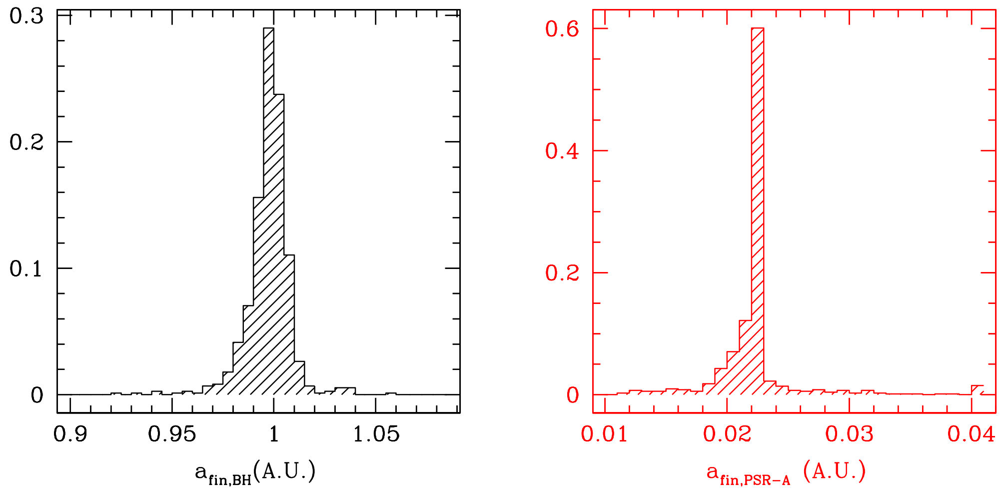


Figura 6.27: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a = 1\,$A.U. a) Variazione della separazione orbitale del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione della separazione orbitale della PSR-A+co trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni.

Separazione orbitale:

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni la variazione media della separazione orbitale della PSR-A+co e della binaria di BH risultano:

$\langle \frac{\Delta a}{a_0} \rangle_{BH}$	$2.5 \cdot 10^{-3} \pm 1.08 \cdot 10^{-2}$
$\langle \mid \frac{\Delta a}{a_0} \mid \rangle_{BH}$	$7.2 \cdot 10^{-3} \pm 5.6 \cdot 10^{-3}$
$\langle \frac{\Delta a}{a_0} \rangle_{PSR-A}$	$-3.5 \cdot 10^{-2} \pm 7.53 \cdot 10^{-1}$
$\langle \mid \frac{\Delta a}{a_0} \mid \rangle_{PSR-A}$	$1.0 \cdot 10^{-1} \pm 1.0 \cdot 10^{-1}$

Osservazioni:

- Il semiasse maggiore finale della PSR-A+co varia in modulo del 10%, un fattore 10-100 volte più grande di quello riscontrato nel caso delle binarie di buchi neri. Se consideriamo la variazione media con il segno, la PSR-A+co tende ad allargarsi ($\sim$ 3%). Anche da questa considerazione è evidente l'effetto distruttivo del singolo BH sulla struttura interna della PSR-A+co.

- La separazione orbitale della stella del cusp si stringe meno dello 0.2%, quasi un fattore 10 in meno rispetto al caso delle binarie di buchi neri.

SEPARAZIONE ORBITALE 3 A.U.

Classificazione degli scattering:

Gli esiti degli scattering simulati sono riportati nella seguente tabella.

	Numero di eventi	Probabilità
Flyby puri	417	0.417
Ionizzazioni	290	0.290
Risonanze irrisolte	6	0.006
Sistemi finali legati	287	0.287

	Numero di eventi	Probabilità rispetto al totale degli eventi	Probabilità rispetto al totale delle ionizzazioni
Ionizzazioni risonanti	1	0.001	0.003
Ionizzazioni con fuga della PSR	146	0.146	0.503
Ionizzazioni con fuga della WD	141	0.141	0.486
Ionizzazioni con fuga della PSR e della WD	2	0.002	0.0069

Velocità di rinculo:

Senza considerare le R, i SL e le I, le velocità di espulsione risultano:

$\langle V_{PSR-A} \rangle$	47.76 ± 15.30 km s^{-1}
$V_{rms\,PSR-A}$	50.15 km s^{-1}
$V_{pp\,PSR-A}$	32.5 km s^{-1}
$\langle V_{BH} \rangle$	$1.52 \cdot 10^{-1} \pm 4.9 \cdot 10^{-2}$ km s^{-1}
$V_{rms\,BH}$	$1.60 \cdot 10^{-1}$ km s^{-1}
$V_{pp\,BH}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$ km s^{-1}

dove i simboli utilizzati sono gli stessi definiti nella Sezione 2.1.a.

Quando viene ionizzata e fugge all'infinito, la pulsar acquista una velocità di rinculo media pari a 340.68 ± 95.92 km s^{-1}.

Escludendo le R e i SL, per il centro di massa della binaria di BH si ricava:

$\langle V_{BH} \rangle$	$3.5 \cdot 10^{-1} \pm 3.4 \cdot 10^{-1}$ km s^{-1}
$V_{rms\,BH}$	$4.92 \cdot 10^{-1}$ km s^{-1}
$V_{pp\,BH}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$ km s^{-1}

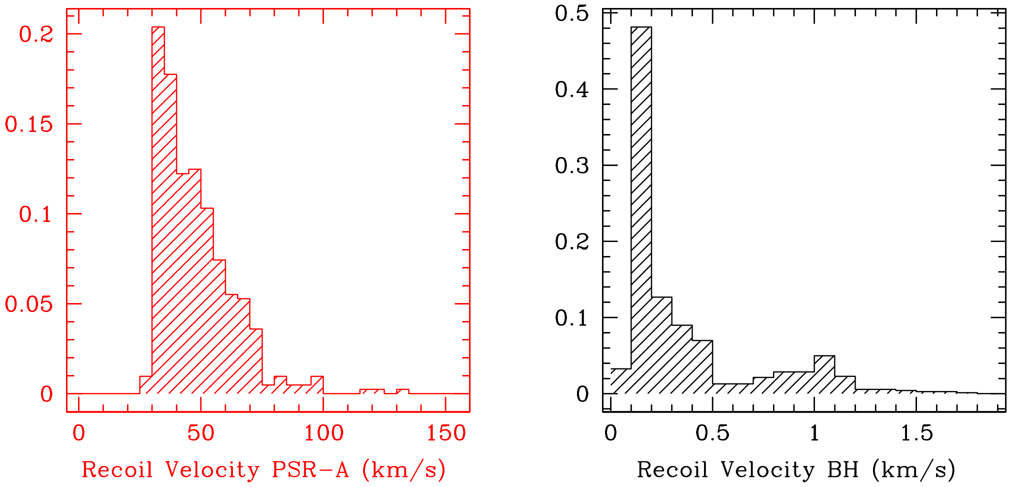


Figura 6.28: $m_1 = 500\, m_\odot$, $m_2 = 1\, m_\odot$, $a = 3\,$A.U. a) Velocità di rinculo della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte, ionizzazioni e sistemi quadrupli legati. b) Velocità di rinculo del BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e sistemi quadrupli legati.

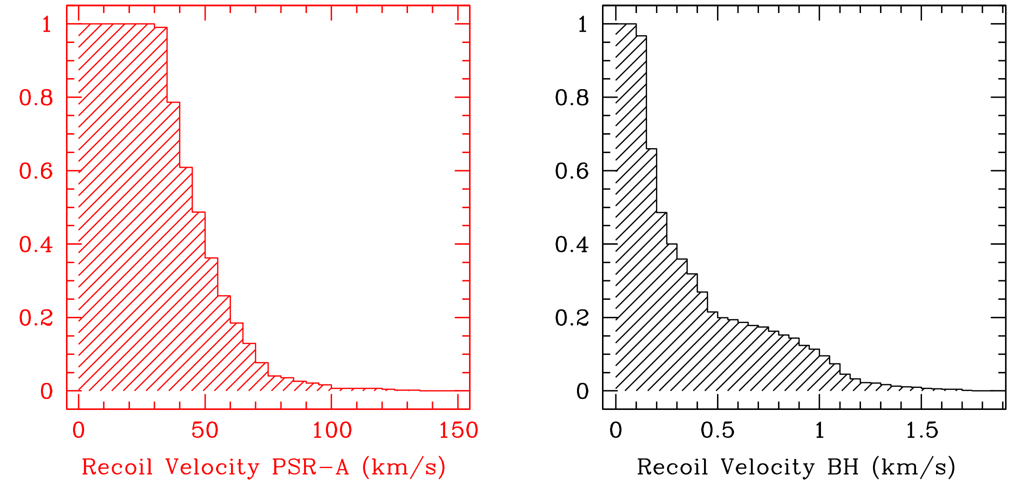


Figura 6.29: $m_1 = 500\, m_\odot$, $m_2 = 1\, m_\odot$, $a = 3\,$A.U. a) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo della PSR-A+co, senza R, I, SL. b) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo del BH trascurando R e SL.

Eccentricità:

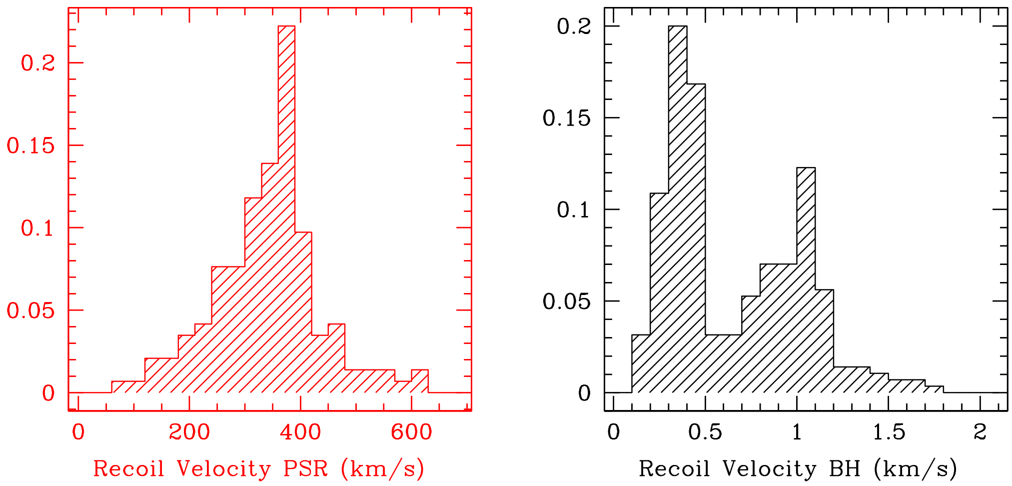


Figura 6.30: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a = 3\,$A.U. a) Velocità di rinculo della PSR considerando soltanto le ionizzazioni. b) Velocità di rinculo del BH considerando soltanto le ionizzazioni. Si noti la presenza di due picchi, uno a $\sim 0.35\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, dovuto alle ionizzazioni in cui fugge la WD, l'altro a $\sim 1.\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, dovuto alle ionizzazioni in cui fugge la pulsar.

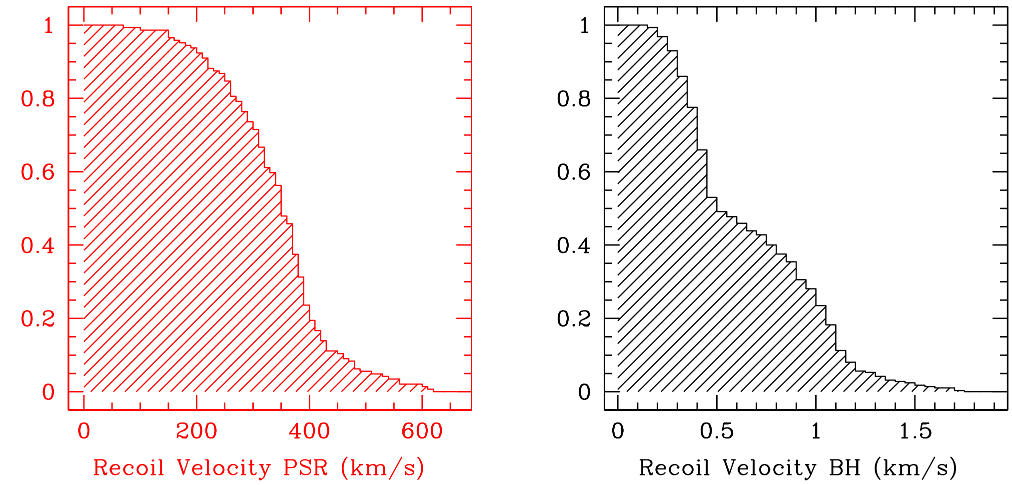


Figura 6.31: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a = 3\,$A.U. a) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo della PSR, quando viene ionizzata e fugge all'infinito. b) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo del BH considerando soltanto le ionizzazioni.

Trascurando le R e le I, le eccentricità finali del sistema risultano.

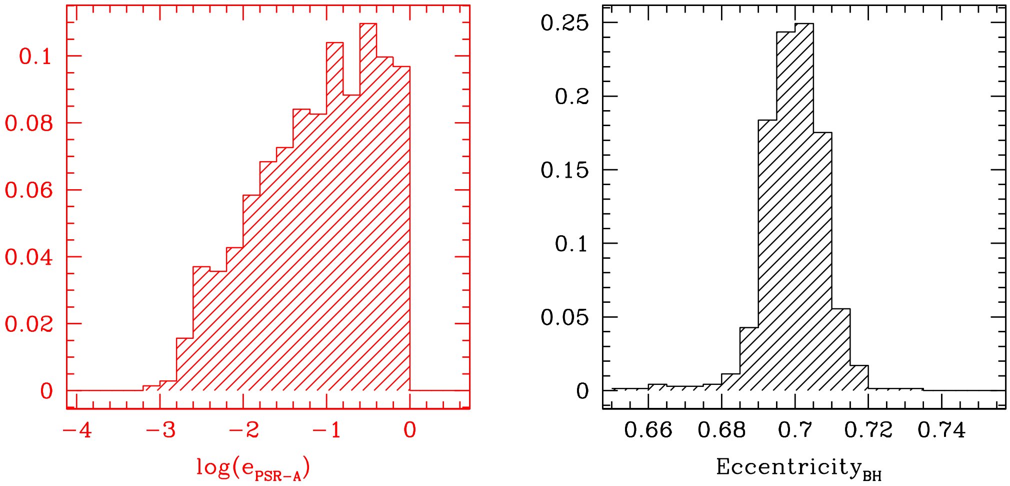


Figura 6.32: $m_1 = 500\, m_\odot$, $m_2 = 1\, m_\odot$, $a = 3$ A.U. a) Eccentricità finale della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Eccentricità finale del BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte.

$\langle e_{PSR-A} \rangle$	$2.08 \cdot 10^{-1} \pm 1.990 \cdot 10^{-1}$
$e_{pp\,PSR-A}$	$3.16 \cdot 10^{-1}$
$\langle e_{BH} \rangle$	$6.998 \cdot 10^{-1} \pm 6.9 \cdot 10^{-3}$
$e_{pp\,BH}$	$0.70 \cdot 10^{-1}$

dove i simboli sono gli stessi usati nella Sezione 2.1.a.

L'eccentricità della PSR-A+co nel caso dello scattering con un singolo BH risulta completamente stravolta, sia considerando il valore medio sia considerando il valore più probabile, anche quando aumentiamo la separazione orbitale della stella del cusp.

Energia di legame:

Senza le risonanze irrisolte:

$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{BH}$	$-1.4 \cdot 10^{-3} \pm 3.22 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{PSR-A}$	$-2.75 \cdot 10^{-1} \pm 4.76 \cdot 10^{-1}$

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni:

$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{BH}$	$1.7 \cdot 10^{-3} \pm 2.31 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{PSR-A}$	$1.9 \cdot 10^{-2} \pm 1.36 \cdot 10^{-1}$

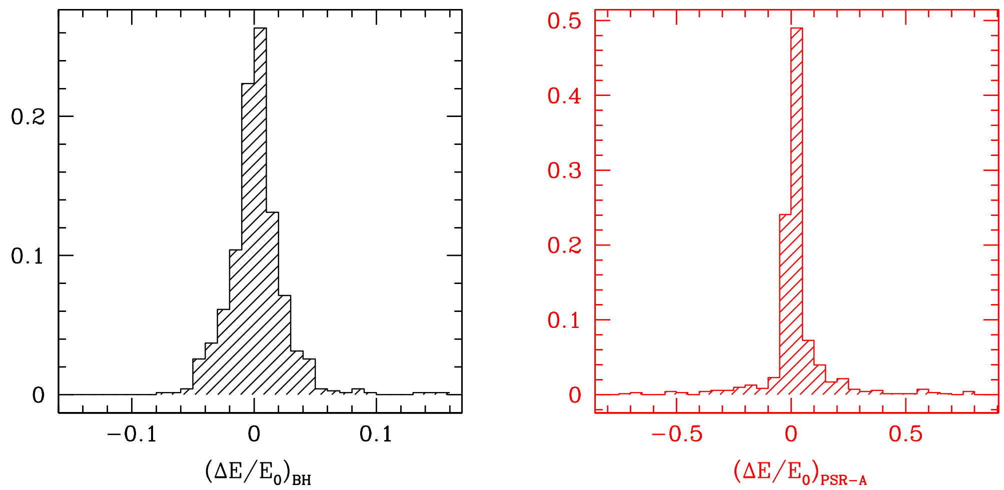


Figura 6.33: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a = 3\,$A.U. a) Variazione dell'energia di legame del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione dell'energia di legame della PSR-A+co trascurando le risonanze irrisolte.

dove $\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$ e $\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$ rappresentano la variazione dell'energia di legame rispettivamente della binaria di BH e della PSR-A+co.

Osservazioni:

- Anche in questo caso, quando si trascurano le ionizzazioni, la variazione dell'energia di legame della PSR-A+co ($\sim$ 2%) è maggiore rispetto al caso del BH binario ($\sim$ 0.6%). Questo conferma l'idea, emersa già dall'analisi delle eccentricità finali, che uno scattering con un BH singolo particolarmente massivo altera notevolmente i parametri orbitali della PSR-A+co.

Separazione orbitale:

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni la variazione media della separazione orbitale della PSR-A+co e della binaria di BH risultano:

$\langle\frac{\Delta a}{a_0}\rangle_{BH}$	$1.2\cdot10^{-3}\pm2.24\cdot10^{-2}$
$\langle\mid\frac{\Delta a}{a_0}\mid\rangle_{BH}$	$1.5\cdot10^{-2}\pm1.3\cdot10^{-2}$
$\langle\frac{\Delta a}{a_0}\rangle_{PSR-A}$	$-4.6\cdot10^{-3}\pm2.1483\cdot10^{-1}$
$\langle\mid\frac{\Delta a}{a_0}\mid\rangle_{PSR-A}$	$6.7\cdot10^{-2}\pm6.6\cdot10^{-2}$

Osservazioni:

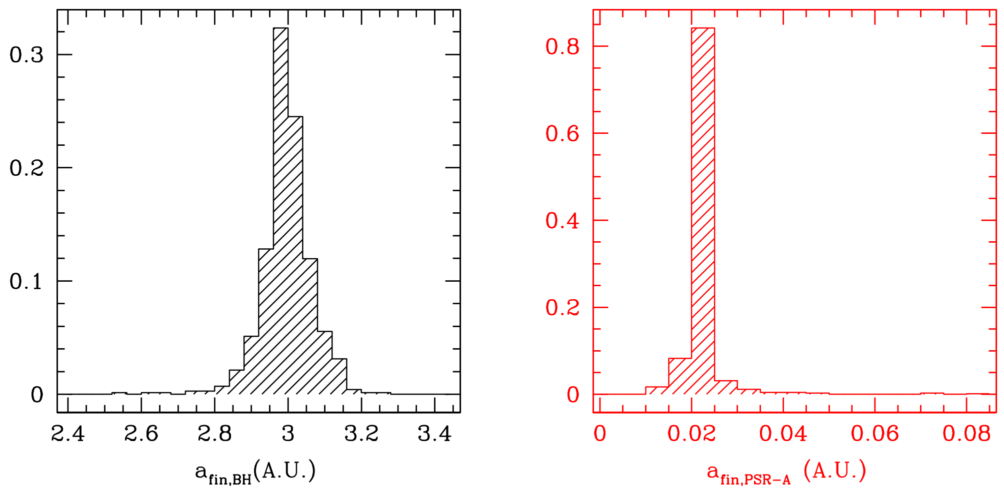


Figura 6.34: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a = 3\,$A.U. a) Variazione della separazione orbitale del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione della separazione orbitale della PSR-A+co trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni.

- Anche in questo caso come in quello del singolo BH + stella del cusp con separazione orbitale di 1 A.U., la variazione media in modulo del semiasse maggiore della PSR-A+co è dell'ordine del 10% ($\sim$ 6.7%), e la pulsar binaria tende ad allargarsi.
- La separazione orbitale della stella del cusp si stringe solo di un fattore 0.1%.

Considerazioni:

È opportuno riassumere quanto abbiamo detto sul caso del BH singolo + cusp nel caso in cui i parametri della PSR-A+co siano quelli *"post-recycling"*.

	$a = 1$ (A.U.)	$a = 3$ (A.U.)
Probabilità di ionizzazione	0.272	0.287
$\langle V_{PSR-A}\rangle$ (km s^{-1})	54.58 ± 19.11	47.76 ± 15.30
$V_{pp\,PSR-A}$ (km s^{-1})	45	32.5
$\langle V_{BH}\rangle$ (km s^{-1})	0.35 ± 0.30	0.35 ± 0.34
$\langle e_{PSR-A}\rangle$	$2.16\cdot10^{-1} \pm 2.07\cdot10^{-1}$	$2.08\cdot10^{-1} \pm 1.99\cdot10^{-1}$
$e_{pp\,PSR-A}$	$3.16\cdot10^{-1}$	$3.16\cdot10^{-1}$
$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$2.6\cdot10^{-3} \pm 1.10\cdot10^{-2}$	$1.7\cdot10^{-3} \pm 2.31\cdot10^{-2}$
$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$	$1.9\cdot10^{-2} \pm 1.58\cdot10^{-1}$	$1.9\cdot10^{-2} \pm 1.36\cdot10^{-1}$

VELOCITÀ: La velocità di espulsione della PSR-A+co è ampiamente *compatibile con quella richiesta per rimanere nell'ammasso globulare per entrambi i sistemi considerati*, ma in particolare per quello con separazione orbitale = 3 A.U..

IONIZZAZIONI: In generale il numero di ionizzazioni è alto per entrambi i sistemi ($\sim 30\%$), a dimostrazione del fatto che è la focalizzazione gravitazionale del BH a portare la PSR-A+co ad una distanza di massimo avvicinamento molto piccola, alterandone così le caratteristiche interne, indipendentemente dalla separazione orbitale della stella del cusp.

ECCENTRICITÀ: Indipendentemente dalla separazione orbitale del sistema BH+stella del cusp, l'eccentricità della PSR-A+co viene completamente stravolta (cresce di $\sim$ 4 ordini di grandezza). Anche questo fenomeno è riconducibile all'enorme focalizzazione gravitazionale del BH.

ENERGIA di LEGAME della PSR-A+co: La variazione dell'energia di legame (e conseguentemente della separazione orbitale) della PSR-A+co è mediamente del 2%, circa un ordine di grandezza in più rispetto al caso del BH binario. Questa circostanza, unitamente a quanto detto per il numero di ionizzazioni e l'eccentricità, ci fa concludere che l'interazione gravitazionale con un BH singolo altera profondamente i parametri orbitali della PSR-A+co.

ENERGIA di LEGAME del BH+stella del CUSP: La variazione dell'energia di legame del sistema formato dal BH con una stella del cusp verifica la relazione 2.68. Infatti:

Separazione orbitale (A.U.)	$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{BH}$	$\frac{(m_3+m_4)}{(m_1+m_2)}$	ξ
1	$2.65 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	0.83
3	$1.73 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	0.54

Il valore di ξ risulta sempre prossimo a 1.

Conclusioni

1. Il sistema singolo BH + stella del cusp sembrerebbe impartire alla PSR-A+co una velocità di rinculo adatta per portarla nella sua attuale posizione, senza espellerla definitivamente dall'ammasso.

2. Tuttavia, a causa dell'enorme focalizzazione gravitazionale esercitata dal BH (che non viene attenuata, come invece succedeva nel caso della binaria di BH, dalla presenza di un BH compagno abbastanza massivo), da una parte si osserva una pesante incidenza delle ionizzazioni ($\sim 30\%$) e dei casi in cui la binaria proiettile rimane legata al BH ($\sim 30\%$); dall'altra, anche negli eventi in cui la PSR-A+co rimane binaria e riesce a fuggire all'infinito, i suoi parametri orbitali (semiasse maggiore, energia di legame, ma soprattutto eccentricità) vengono alterati drasticamente.

3. Poiché la PSR-A+co, così come la osserviamo oggi, ha un'eccentricità pressoché nulla, e poiché i tempi di circolarizzazione per una binaria cosituita da due stelle compatte sono proibitivamente lunghi, quanto detto al punto 2 ci porta ad *escludere l'eventualità che l'espulsione della* PSR-A+co *dal core sia dovuta ad un'interazione gravitazionale con un singolo IMBH avvenuta dopo la fase di recycling della pulsar.*

4. D'altra parte il tempo di circolarizzazione per una binaria prima della fase di recycling è molto breve. Pertanto le considerazioni fatte ai punti 2 e 3 *non ci permettono di escludere il caso in cui lo scattering sia avvenuto tra un BH singolo di 500 $m_\odot$ e una binaria descritta dai parametri orbitali che, secondo i modelli evolutivi, caratterizzavano la PSR-A+co prima del recycling.*

6.2.2.b Binaria PSR-A+CO

Come abbiamo detto al punto 4 delle conclusioni esposte nella precedente sezione, è opportuno considerare anche il caso in cui l'espulsione della PSR-A+co sia avvenuta prima della fase di recycling.
Determinare i parametri orbitali del sistema (d'ora in poi PSR-A+CO) che può avere dato origine, dopo la fase di recycling, all'attuale PSR-A+co non è per nulla banale. I principali fattori di cui bisogna tener conto sono i seguenti.

1. Poiché la PSR-A+co deriva da una binaria convergente (si veda il Cap.4), il periodo orbitale prima del recycling deve essere maggiore di quello attuale (0.86 giorni), ma inferiore al periodo di biforcazione (1-2 giorni).

2. Come si ricava dalle osservazioni, l'attuale compagna della PSR-A è una nana bianca piuttosto massiva ($\sim 0.2\, m_\odot$) rispetto alla media di questo tipo di pulsar a millisecondo binarie. Perché, dopo la fase di recycling, la compagna sia ancora così massiva, è necessario pensare ad una massa iniziale dell'ordine di 0.8 $m_\odot$. Tuttavia, l'attuale massa di *turn-off* per NGC 6752 è dell'ordine di 0.7 $m_\odot$. Poiché, a causa

della frizione dinamica agente sulla PSR-A+co (Colpi et al. 2002 [16]), l'espulsione della binaria non può essere avvenuta più di 10^9 anni fa', dobbiamo richiedere che a quei tempi esistessero stelle di $\sim 0.8\, m_\odot$ non ancora uscite dalla sequenza principale. Questa circostanza non è impossibile; ma la frazione di stelle di sequenza principale con massa $\sim 0.8\, m_\odot$ è molto bassa.
La maggioranza delle stelle in NGC 6752 ha massa dell'ordine di $0.4 - 0.5\, m_\odot$. Che la compagna della PSR-A prima del riciclaggio avesse una massa si questo tipo non è impossibile; ma sembra, tuttavia, improbabile, in quanto richiederebbe che la pulsar sia stata riciclata con un trasferimento di massa insolitamente piccolo ($\sim 0.2\, m_\odot$) e soprattutto che la compagna, benché fin dall'inizio molto leggera, non abbia subito quegli effetti distruttivi (evaporazione, frammentazione, etc.) che accompagnano l'evoluzione di binarie X così poco massive.
Un'altra possibilità consiste nel supporre che l'attuale compagna della PSR-A non sia la stessa stella che ha trasferito materia e momento angolare alla pulsar, bensì una WD catturata per interazione gravitazionale (scambio o cattura) in una fase successiva al recycling. In questo caso, tuttavia, rimane il problema della circolarizzazione dell'orbita, in quanto le binarie nate per scambio tendono ad avere elevate eccentricità iniziali e, se costituite da due oggetti compatti, hanno scarse possibilità di circolarizzare.

In seguito a queste considerazioni, abbiamo scelto i seguenti parametri della binaria proiettile PSR-A+CO.

- → massa della stella di neutroni = 1.4 $m_\odot$;
- → massa della compagna = **0.8** $m_\odot$;
- → separazione orbitale = 0.03 A.U. (corrispondente ad un periodo di ~ 1.3 giorni).

Per quanto riguarda l'ecentricità della binaria proiettile, abbiamo effettuato due serie di simulazioni:

1. La simulazione di 1000 eventi di scattering con eccentricità iniziale della binaria proiettile $e_{PSR-A} = 0$;
2. La simulazione di 1000 eventi di scattering con eccentricità iniziale della binaria proiettile $e_{PSR-A} = 0.7$.

Alla binaria bersaglio sono stati assegnati i seguenti parametri.

- → massa del BH = 500 $m_\odot$;

→ massa della stella del cusp = 1 $m_\odot$;

→ separazione orbitale iniziale = 3 A.U.;

→ eccentricità iniziale = 0.7.

Mostriamo di seguito i risultati delle simulazioni effettuate.

Classificazione degli scattering:

Gli esiti degli scattering simulati sono riportati nella seguente tabella.

	Probabilità	
	$e_{PSR-A} = 0.0$	$e_{PSR-A} = 0.7$
Flyby puri	0.393	0.041
Ionizzazioni	0.347	0.924
Risonanze irrisolte	0.003	0.001
Sistemi finali legati	0.257	0.035

	Probabilità rispetto al totale degli eventi	
	$e_{PSR-A} = 0.0$	$e_{PSR-A} = 0.7$
Ionizzazioni risonanti	0.001	0.041
Ionizzazioni con fuga della PSR	0.175	0.237
Ionizzazioni con fuga della WD	0.171	0.380
Ionizzazioni con fuga della PSR e della WD	0	0.265

Osservazioni

- Per un'eccentricità iniziale nulla i risultati ottenuti sono simili a quelli ricavati per il sistema *post-recycling*, con un aumento del 5% del numero di ionizzazioni ($\sim$ 35% anziché $\sim$ 30%).

- Invece, partendo da un'eccentricità iniziale piuttosto elevata ($e_{PSR-A} = 0.7$), i risultati cambiano completamente, con un **numero di ionizzazioni che supera il 90% !** Questa circostanza va probabilmente imputata al fatto che, in un sistema così eccentrico, la stella di neutroni e la compagna passano la maggior parte del tempo alla massima distanza tra di loro, rendendo più facile la dissociazione della binaria.

- Le considerazioni appena espresse sono molto importanti, dal momento che in un ammasso globulare le binarie si formano soprattutto per interazioni dinamiche (scambi o cattura mareale). Le binarie nate per scambio sono in generale piuttosto eccentriche (Sigurdsson & Phinney 1993 [88]). Le binarie nate per cattura mareale circolarizzano rapidamente; ma sono anche meno numerose delle precedenti, visto che si formano soltanto in seguito a incontri molto stretti tra due stelle (con distanze di massimo avvicinamento dell'ordine di 3-5 volte il raggio della più estesa tra le due). Il fatto che la popolazione di binarie in un ammasso globulare tende a presentare eccentricità elevate rende meno probabile la sopravvivenza della binaria PSR-A+CO dopo l'interazione con il BH.

Velocità di rinculo:

Senza considerare le R, i SL e le I, le velocità di espulsione risultano:

	$e_{PSR-A} = 0.0$	$e_{PSR-A} = 0.7$
$\langle V_{PSR-A}\rangle$ km s^{-1}	53.80 ± 21.07	62.95 ± 30.11
$V_{rms\,PSR-A}$ km s^{-1}	57.78	69.77
$V_{pp\,PSR-A}$ km s^{-1}	37.5	52.5
$\langle V_{BH}\rangle$ km s^{-1}	$2.36 \cdot 10^{-1} \pm 9.2 \cdot 10^{-2}$	$2.76 \cdot 10^{-1} \pm 1.32 \cdot 10^{-1}$
$V_{rms\,BH}$ km s^{-1}	$2.54 \cdot 10^{-1}$	$3.06 \cdot 10^{-1}$
$V_{pp\,BH}$ km s^{-1}	$1.7{\cdot}10^{-1}$	$1.7{\cdot}10^{-1}$

dove i simboli utilizzati sono stati definiti nella Sezione 2.1.a.

Eccentricità:

Trascurando le R e le I, le eccentricità finali del sistema risultano.

	$e_{PSR-A} = 0.0$	$e_{PSR-A} = 0.7$
$\langle e_{PSR-A}\rangle$	$2.71 \cdot 10^{-1} \pm 2.41 \cdot 10^{-1}$	$6.16 \cdot 10^{-1} \pm 2.47 \cdot 10^{-1}$
$e_{pp\,PSR-A}$	$3.16{\cdot}10^{-1}$	$3.47{\cdot}10^{-1}$
$\langle e_{BH}\rangle$	$6.998 \cdot 10^{-1} \pm 9.7 \cdot 10^{-3}$	$7.003 \cdot 10^{-1} \pm 9.9 \cdot 10^{-3}$
$e_{pp\,BH}$	$0.70{\cdot}10^{-1}$	$0.70{\cdot}10^{-1}$

dove i simboli sono gli stessi usati nella Sezione 2.1.a.

L'eccentricità della binaria proiettile PSR-A+CO risulta completamente stravolta, come già visto nel caso della binaria proiettile PSR-A+co.

Energia di legame:

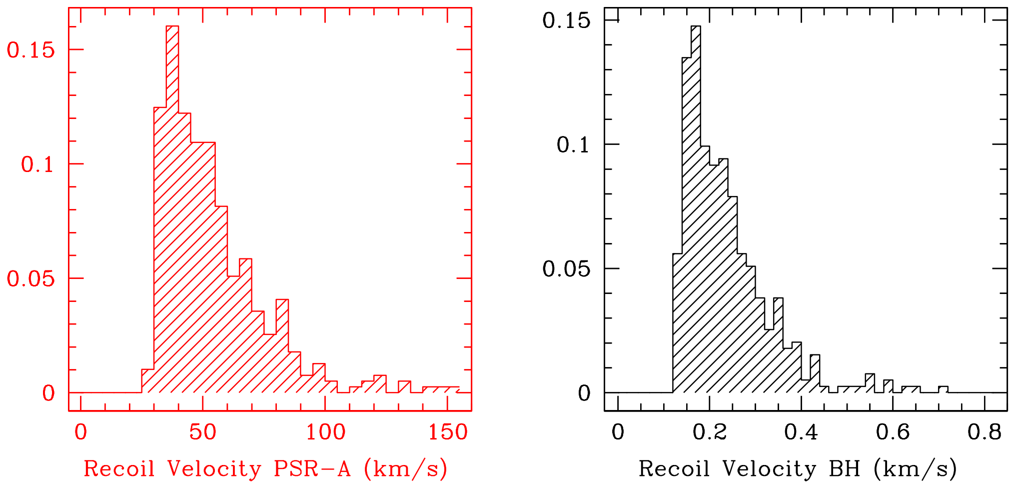


Figura 6.35: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a_{BH} = 1\,$A.U. $m_3 = 1.4\,m_\odot$, $m_4 = 0.8\,m_\odot$, $a_{PSR-A} = 0.03\,$A.U., $\mathbf{e}_{PSR-A} = 0$ a) Velocità di rinculo della PSR-A+CO nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte, ionizzazioni e sistemi quadrupli legati. b) Velocità di rinculo del BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte, ionizzazioni e sistemi quadrupli legati.

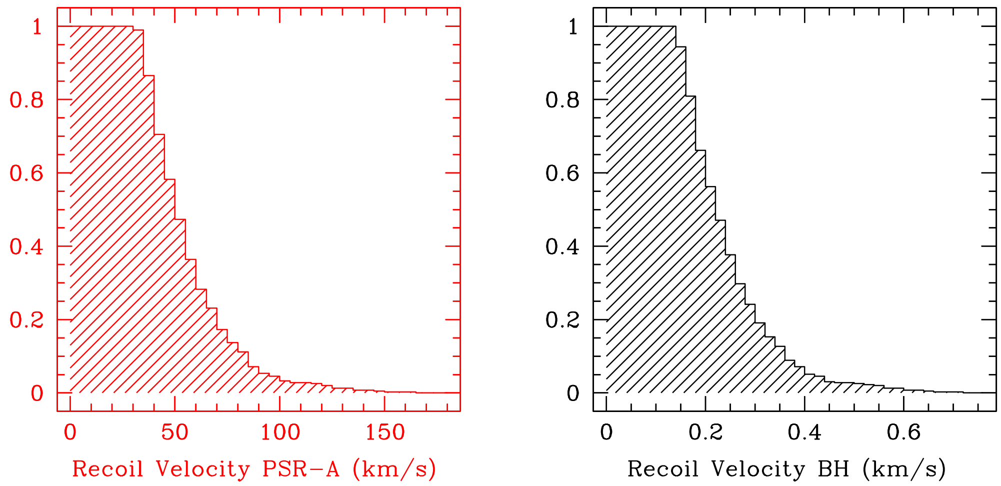


Figura 6.36: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a_{BH} = 1\,$A.U. $m_3 = 1.4\,m_\odot$, $m_4 = 0.8\,m_\odot$, $a_{PSR-A} = 0.03\,$A.U., $\mathbf{e}_{PSR-A} = 0$ a) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo della PSR-A+CO, senza R, I, SL. b) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo del BH trascurando R, I e SL.

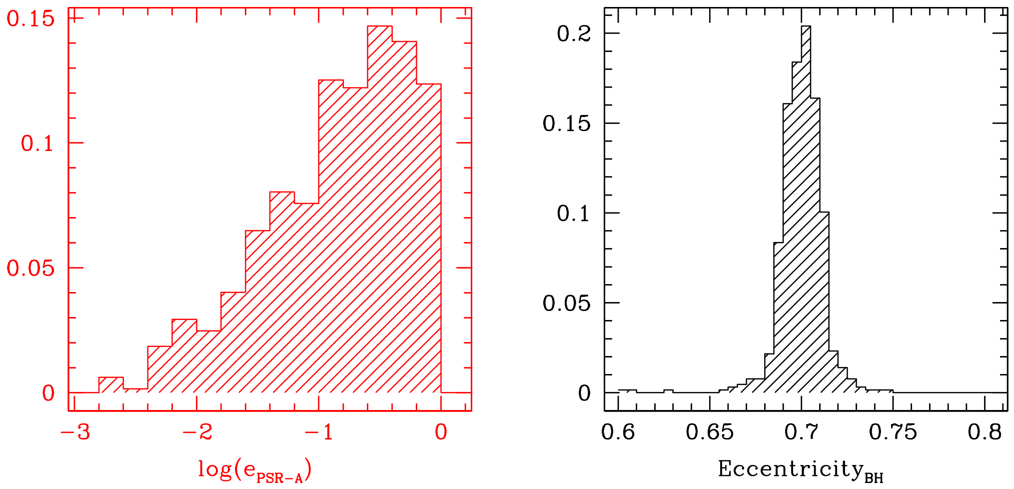


Figura 6.37: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a_{BH} = 1\,\mathrm{A.U.}$ $m_3 = 1.4\,m_\odot$, $m_4 = 0.8\,m_\odot$, $a_{PSR-A} = 0.03\,\mathrm{A.U.}$, $\mathbf{e}_{PSR-A} = 0$ a) Eccentricità finale della PSR-A+CO nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Eccentricità finale del BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte.

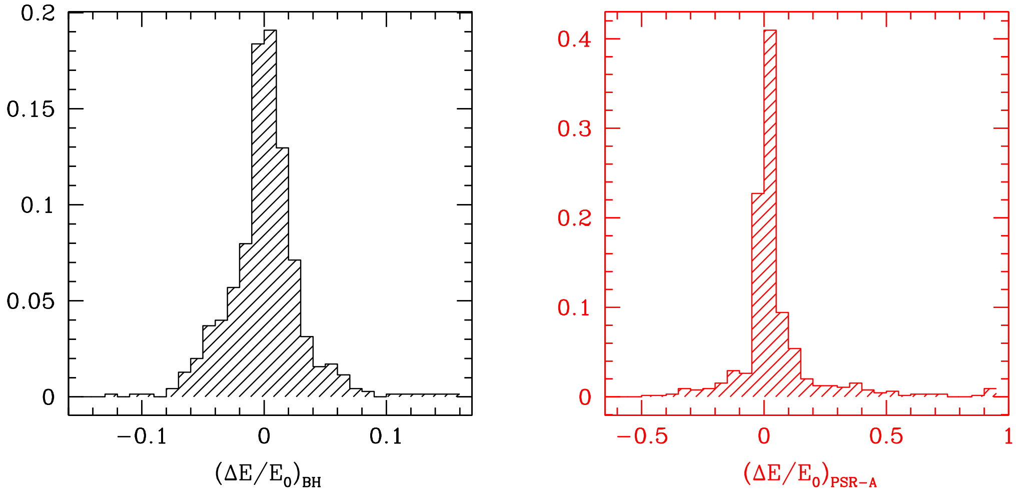


Figura 6.38: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a_{BH} = 1\,\mathrm{A.U.}$ $m_3 = 1.4\,m_\odot$, $m_4 = 0.8\,m_\odot$, $a_{PSR-A} = 0.03\,\mathrm{A.U.}$, $\mathbf{e}_{PSR-A} = 0$ a) Variazione dell'energia di legame del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione dell'energia di legame della PSR-A+CO trascurando le risonanze irrisolte.

Senza le risonanze irrisolte:

	$e_{PSR-A} = 0.0$	$e_{PSR-A} = 0.7$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{BH}$	$-4.9 \cdot 10^{-3} \pm 4.28 \cdot 10^{-2}$	$-5.7 \cdot 10^{-4} \pm 2.010 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{PSR-A}$	$-3.13 \cdot 10^{-1} \pm 5.20 \cdot 10^{-1}$	$-9.42 \cdot 10^{-1} \pm 2.26 \cdot 10^{-1}$

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni:

	$e_{PSR-A} = 0.0$	$e_{PSR-A} = 0.7$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{BH}$	$7.0 \cdot 10^{-4} \pm 3.024 \cdot 10^{-2}$	$4.0 \cdot 10^{-4} \pm 3.790 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{PSR-A}$	$4.7 \cdot 10^{-2} \pm 1.85 \cdot 10^{-1}$	$-2.42 \cdot 10^{-1} \pm 3.81 \cdot 10^{-1}$

dove i simboli usati sono stati definiti alla sezione 2.1.a.

Osservazioni:

- Anche in questo caso, quando si trascurano le ionizzazioni, la variazione dell'energia di legame della PSR-A+CO ($\sim$ 5% per $e_{PSR-A} = 0$, $\sim$ 24% per $e_{PSR-A} = 0.7$) è maggiore rispetto al caso del BH binario ($\sim$ 0.6%). Questo conferma l'idea, emersa già dall'analisi delle eccentricità finali, che uno scattering con un BH singolo particolarmente massivo altera notevolmente i parametri orbitali della PSR-A+CO.

Separazione orbitale:

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni la variazione media della separazione orbitale della PSR-A+co e della binaria di BH risultano:

$\langle \frac{\Delta a}{a_0} \rangle_{BH}$	$-1.9 \cdot 10^{-4} \pm 2.979 \cdot 10^{-2}$
$\langle \mid \frac{\Delta a}{a_0} \mid \rangle_{BH}$	$2.05 \cdot 10^{-2} \pm 1.69 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta a}{a_0} \rangle_{PSR-A}$	$-3.15 \cdot 10^{-1} \pm 1.88 \cdot 10^{-1}$
$\langle \mid \frac{\Delta a}{a_0} \mid \rangle_{PSR-A}$	$3.31 \cdot 10^{-1} \pm 7.3 \cdot 10^{-2}$

Osservazioni:

- Il semiasse maggiore della binaria proiettile è notevolmente alterato (più del 30%) e nella maggior parte dei casi si allarga.

- Il semiasse maggiore dell'orbita della stella del cusp varia in media del 2%, stringendosi ed allargandosi in modo pressoché equivalente (tant'è vero che la variazione media presa con il suo segno è quasi nulla).

Conclusioni

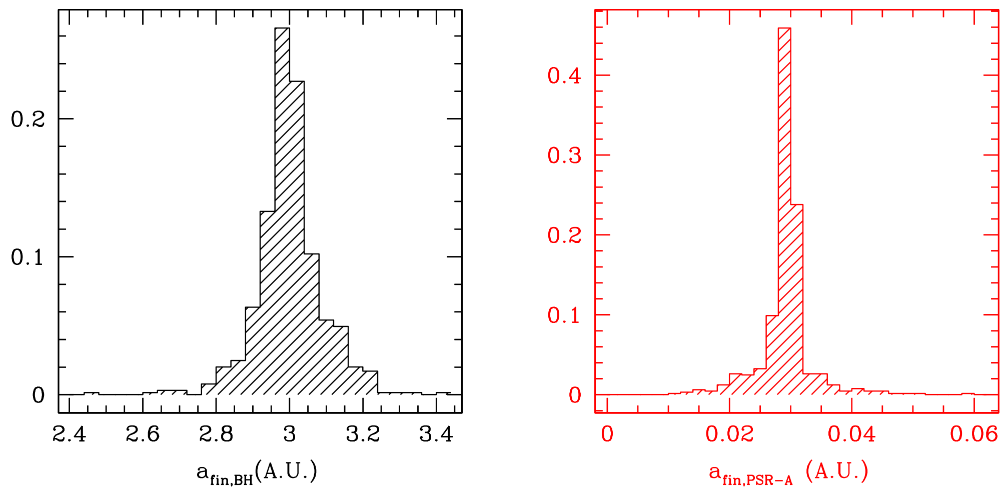


Figura 6.39: $m_1 = 500\,m_\odot$, $m_2 = 1\,m_\odot$, $a_{BH} = 1$ A.U. $m_3 = 1.4\,m_\odot$, $m_4 = 0.8\,m_\odot$, $a_{PSR-A} = 0.03$ A.U., $\mathbf{e}_{PSR-A} = 0$ a) Variazione della separazione orbitale del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione della separazione orbitale della PSR-A+CO trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni.

Come abbiamo fatto nelle sezioni precedenti, anche per le simulazioni del tipo *"pre-recycling"* riassumiamo i principali risultati emersi dalle simulazioni.

	$e_{PSR-A} = 0.0$	$e_{PSR-A} = 0.7$
Probabilità di ionizzazione	0.347	0.924
$\langle V_{PSR-A}\rangle$ (km s^{-1})	53.80 ± 21.07	62.95 ± 30.11
$V_{pp\,PSR-A}$ (km s^{-1})	37.5	52.5
$\langle V_{BH}\rangle$ (km s^{-1})	$2.36 \cdot 10^{-1} \pm 9.2 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-1} \pm 1.4 \cdot 10^{-1}$
$\langle e_{PSR-A}\rangle$	$2.71 \cdot 10^{-1} \pm 2.41 \cdot 10^{-1}$	$6.16 \cdot 10^{-1} \pm 2.47 \cdot 10^{-1}$
$e_{pp\,PSR-A}$	$3.16 \cdot 10^{-1}$	$3.47 \cdot 10^{-1}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$7.0 \cdot 10^{-4} \pm 3.024 \cdot 10^{-2}$	$4.0 \cdot 10^{-4} \pm 3.790 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{PSR-A}$	$4.7 \cdot 10^{-2} \pm 1.85 \cdot 10^{-1}$	$-2.42 \cdot 10^{-1} \pm 3.81 \cdot 10^{-1}$

VELOCITÀ: La velocità di espulsione della PSR-A+CO è *compatibile con quella richiesta per rimanere nell'ammasso globulare per entrambi i sistemi considerati.*

IONIZZAZIONI: Come abbiamo già fatto notare, il numero di ionizzazioni è alto anche per un'eccentricità iniziale nulla ($\sim 35\%$), ma supera addirittura il 90% dei casi per una eccentricità iniziale elevata

($e_{PSR-A} = 0.7$). Questo comporta una riduzione del 10% della probabilità che lo scattering si sia verificato prima della fase di recycling, se assumiamo che le binarie negli ammassi globulari abbiano preferibilmente eccentricità elevate (e quindi si siano formate principalmente per scambio).

ECCENTRICITÀ: Per via dellla focalizzazione gravitazionale, l'eccentricità della binaria proiettile viene completamente stravolta (cresce di $\sim$ 4 ordini di grandezza). Ma questo, nello scenario pre-recycling, non rappresenta un problema.

ENERGIA di LEGAME della PSR-A+CO: La variazione dell'energia di legame (e conseguentemente della separazione orbitale) della binaria proiettile è consistente nel caso di eccentricità iniziale nulla ($\sim$ 4%), ma ben più alta nel caso di eccentricità iniziale $e_{PSR-A} = 0.7$ ($\sim$ 24%). Per di più, nel caso di eccentricità iniziale 0.7 la variazione di energia ha segno negativo (cioè la binaria mediamente si allarga), anche se escludiamo le ionizzazioni.

ENERGIA di LEGAME del BH + stella del CUSP: La variazione dell'energia di legame della binaria di BH verifica approssimativamente la relazione (2.68). Infatti:

Eccentricità iniziale	$\langle\frac{\Delta E}{E_0}\rangle_{BH}$	$\frac{(m_3+m_4)}{(m_1+m_2)}$	ξ
0.0	$7.0 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	0.16
0.7	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-2}$	0.10

In questo caso il coefficiente ξ risulta nettamente inferiore ad 1, a differenza di tutti gli altri casi esaminati. Evidentemente la binaria proiettile pre-recycling comincia ad essere troppo massiva per essere considerata un oggetto puntiforme di massa trascurabile rispetto alla binaria bersaglio (che è l'assunzione sotto cui si può considerare valida la 2.68).

6.2.3 Confronto tra BH singolo e BH binario

Per concludere, può essere utile riassumere qui le principali informazioni ricavate dalle simulazioni.

★ Sia nel caso della binaria di BH che in quello del singolo BH il range di **VELOCITÀ DI RINCULO** emerso dalle simulazioni è compatibile con il valore necessario per spiegare l'eiezione della PSR-A+co dal core.

★ Per quanto riguarda i **PARAMETRI ORBITALI** della binaria-proiettile, invece, le simulazioni hanno evidenziato notevoli differenze tra le interazioni con BH binari e con BH singoli.

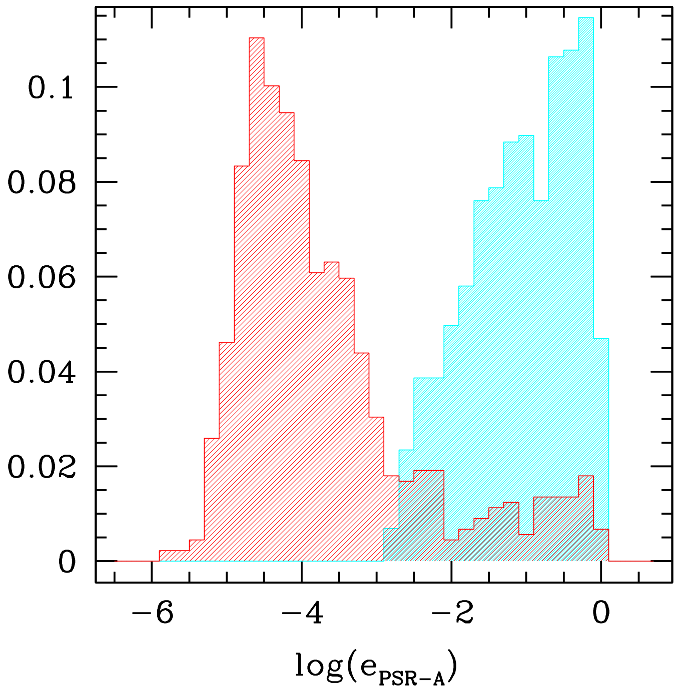


Figura 6.40: Eccentricità finale media della PSR-A+co dopo lo scattering con una binaria di buchi neri ($m_1 = 50\,m_\odot$, $m_2 = 10\,m_\odot$) (*rosso*), e in seguito a scattering con un singolo buco nero ($m_1 = 500\,m_\odot$) e una stella del cusp ($m_2 = 1\,m_\odot$) (*ciano*).

IONIZZAZIONI_ Le ionizzazioni nel caso del BH binario si mantengono tra l'8 e il 12% dei casi considerati; mentre nel caso del singolo BH salgono al 30% dei casi considerati.

ECCENTRICITÀ_ L'eccentricità iniziale della PSR-A+co, pressoché nulla ($\lesssim 10^{-5}$), viene sostanzialmente preservata nelle interazioni con binarie di BH; mentre risulta drammaticamente stravolta (aumentando di oltre 4 ordini di grandezza) in seguito agli scattering con un singolo BH.

ENERGIA di LEGAME & SEPARAZIONE ORBITALE_ Se si trascurano le ionizzazioni, l'energia di legame e, conseguentemente, la separazione orbitale della PSR-A+co rimangono pressoché invariate dopo l'interazione con una binaria di BH. Infatti la variazione dell'energia di legame della PSR-A+co in seguito all'interazione con una binaria di BH rimane sempre inferiore al 6 per mille. Nel caso di interazioni con un singolo BH e una stella del cusp la variazione dell'energia di legame è circa un ordine di grandezza maggiore ($\sim 2\%$).

Queste differenze sono probabilmente legate all'entità della **FOCALIZZAZIONE GRAVITAZIONALE**. Infatti nel caso di un BH binario la focalizzazione gravitazionale esercitata dalla componente più massiva e quella esercitata dalla componente più leggera interferiscono tra di loro, annullandosi parzialmente a vicenda. Quindi, la binaria proiettile riesce a passare ad una distanza da entrambe le componenti della binaria bersaglio sufficientemente grande da evitare alterazioni gravi dei propri parametri orbitali.
Invece la focalizzazione gravitazionale esercitata da un BH singolo non trova alcun ostacolo, e "risucchia" letteralmente la binaria incoming, costringendola ad avvicinarglisi tanto da ionizzarla o comunque stravolgerne le caratteristiche orbitali.

★ Il fatto che un singolo BH produca più ionizzazioni di una binaria di BH non è in contraddizione con la constatazione che le velocità di rinculo dovute a interazioni con un singolo BH sono inferiori a quelle dovute a interazioni con una binaria di BH. Infatti le velocità di rinculo più basse nel caso del singolo BH sono dovute almeno a due fattori.

- Da una parte *il sistema BH+cusp è meno hard di alcune delle binarie di BH considerate*. Ad esempio, confrontando le energie di legame, E_b, e le velocità di rinculo attese, v_{ej}, (eq. 5.63) nel caso di una binaria con ($m_1 = 200\, m_\odot$, $m_2 = 10\, m_\odot$) e di un singolo

BH+stella del cusp, si trova:

$$E_b(m_1 = 200\,m_\odot,\ m_2 = 10\,m_\odot) \simeq 1.8 \cdot 10^{49}\,\mathrm{erg\,s^{-1}}$$
$$E_b(m_1 = 500\,m_\odot,\ m_2 = 1\,m_\odot) \simeq 4.5 \cdot 10^{48}\,\mathrm{erg\,s^{-1}}$$

$$v_{ej}(m_1 = 200\,m_\odot,\ m_2 = 10\,m_\odot) \sim 90\,\mathrm{km\,s^{-1}}$$
$$v_{ej}(m_1 = 500\,m_\odot,\ m_2 = 1\,m_\odot) \sim 30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$$

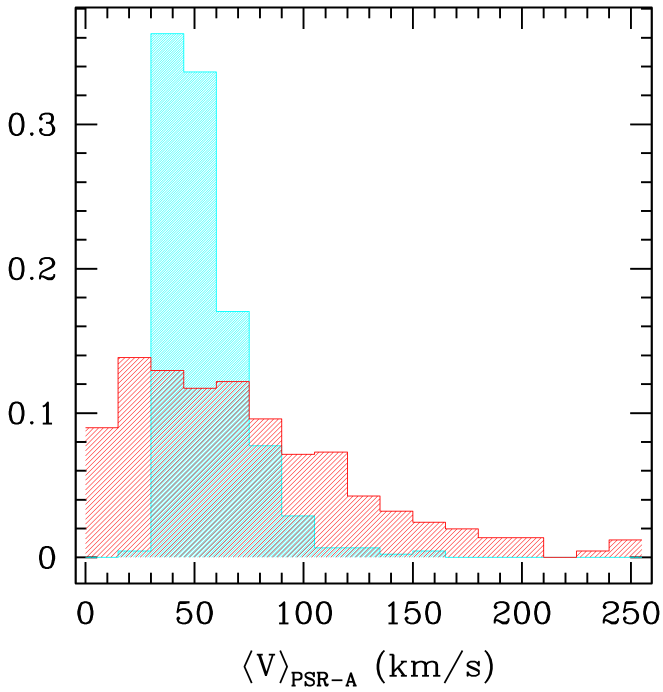


Figura 6.41: Velocità di rinculo media della PSR-A+co in seguito a scattering con una binaria di buchi neri ($m_1 = 50\,m_\odot$, $m_2 = 10\,m_\odot$) (*rosso*), e in seguito a scattering con un singolo buco nero ($m_1 = 500\,m_\odot$) e una stella del cusp ($m_2 = 1\,m_\odot$) (*ciano*).

- D'altra parte il singolo BH, che provoca ionizzazioni con estrema facilità, agisce nei confronti delle velocità di espulsione della PSR-A+co come un vero e proprio "**FILTRO PASSA-BASSO**". Infatti, come sappiamo, gli eventi che comportano il masssimo trasferimento di energia (e quindi le maggiori velocità finali) sono quelli in cui la binaria proiettile si avvicina di più al centro di massa della binaria bersaglio. Ma tali eventi sono anche quelli in cui la binaria proiettile corre i maggiori rischi di venire ionizzata. Nel caso del singolo BH, quindi, tutti gli eventi più energetici, che determinerebbero le massime velocità di fuga, si risolvono in ionizzazioni e non possono contribuire alla distribuzione finale delle velocità di rinculo della binaria PSR-A+co. Il risultato è che, nel caso del singolo BH, la distribuzione delle velocità di rinculo della PSR-A+co appare priva della coda ad alte velocità (si veda la figura 6.41).

★ L'alterazione dell'eccentricità ci porta a scartare la possibilità che l'espulsione della PSR-A+co sia avvenuta ad opera di un BH singolo, a meno che tale evento si sia verificato prima della fase di recycling. In questo caso la binaria avrebbe avuto tutto il tempo di ri-corcolarizzarsi durante la fase di trasferimento di massa. Tuttavia anche questo scenario presenta alcune dificoltà:

- da una parte, per limitare il numero di ionizzazioni, la binaria proiettile doveva avere un'orbita iniziale pressoché circolare (circostanza che non sembra facile a realizzarsi in un ambiente denso come il core di un ammasso globulare).
- dall'altra la massa attuale della compagna pone dei vincoli abbastanza rigidi alla massa iniziale, difficilmente conciliabili con le tracce evolutive della popolazione stellare di NGC 6752.

6.2.4 La binaria BH + NS

Per completezza, consideriamo anche il caso in cui la binaria bersaglio è costituita da un sistema meno esotico rispetto a quelli precedentemente descritti, ossia un BH di massa relativamente piccola ($\mathbf{50\,m_\odot}$) e una stella di neutroni ($\mathbf{1.4\,m_\odot}$). La simulazione di 1000 eventi di scattering coinvolgenti una binaria bersaglio di questo tipo, con separazione orbitale a = 1 A.U. ed eccentricità $e = 0.7$, e una binaria-proiettile con le caratteristiche della PSR-A post-recycling ha dato i seguenti risultati.

Classificazione degli scattering:

Gli esiti degli scattering simulati sono riportati nella seguente tabella.

	Numero di eventi	Probabilità
Flyby puri	623	0.623
Scambi	1	0.001
Ionizzazioni	52	0.052
Risonanze irrisolte	11	0.011
Sistemi finali legati	313	0.313

Le ionizzazioni si distinguono tra:

	Numero di eventi	Probabilità rispetto al totale degli eventi	Probabilità rispetto al totale delle ionizzazioni
Ionizzazioni risonanti	8	0.008	0.154
Ionizzazioni con fuga della PSR	16	0.016	0.308
Ionizzazioni con fuga della WD	27	0.027	0.519
Ionizzazioni con fuga della PSR e della WD	1	0.001	0.019

Considerazioni:

- Le ionizzazioni della PSR-A+co costituiscono solo il 5% del totale delle interazioni.
- Nel corso di una simulazione si è verificato uno scambio tra la stella di neutroni inizialmente formante la binaria con il BH e le due componenti della PSR-A+co. Il risultato finale sembra essere la formazione di un sistema triplo stabile molto stretto costituito dal BH, dalla PSR-A e dalla nana bianca (Fig.6.42).

Velocità di rinculo:

Senza considerare le R, i SL e le I, le velocità di espulsione risultano:

$\langle V_{PSR-A} \rangle$	26.97 ± 22.00 km s^{-1}
$V_{rms\,PSR-A}$	34.80 km s^{-1}
$V_{pp\,PSR-A}$	15 km s^{-1}
$\langle V_{BH} \rangle$	0.84 $\pm$0.68 km s^{-1}
$V_{rms\,BH}$	1.08 km s^{-1}
$V_{pp\,BH}$	0.45 km s^{-1}

Considerazioni:

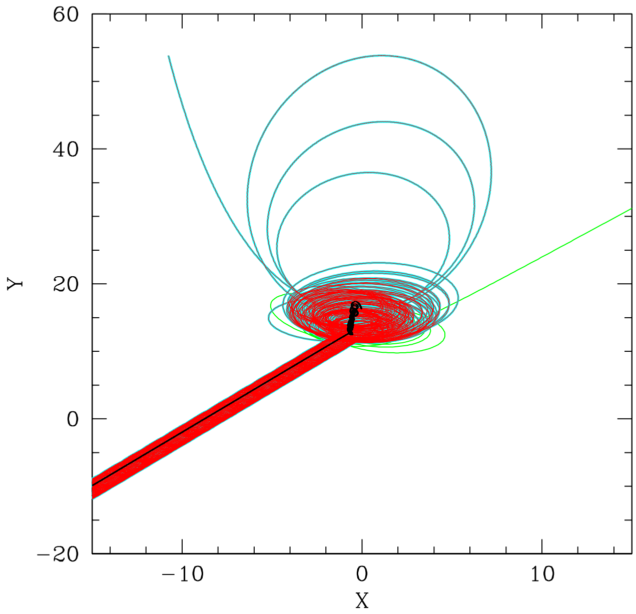


Figura 6.42: Scambio: una binaria inizialmente costituita da un BH di $50\,m_\odot$ (*nero*) e una NS di $1.4\,m_\odot$ (*verde*) interagisce con una binaria formata da una stella di neutroni (*ciano*) e una nana bianca (*rosso*), provocando l'eiezione della stella di neutroni rappresentata in *verde* e la formazione di un sistema triplo BH(*nero*)+NS(*ciano*)+ WD(*rosso*).

- i simboli impiegati sono gli stessi usati nella Sezione 2.1.a.

- la velocità di rinculo media è ancora compatibile con l'ipotesi di espulsione della PSR-A+co, anche se rappresenta il valore più basso ricavato nel corso delle nostre simulazioni. Questo non costituisce una stranezza; infatti la binaria bersaglio in esame è anche la meno hard tra tutte le binarie considerate. Infatti, misurando l'hardeness di una binaria con la sua energia di legame E_b, si trova:

$$E_b(m_1 = 50\,m_\odot,\, m_2 = 1.4\,m_\odot) \simeq 6.2 \cdot 10^{47}\,\mathrm{erg}$$
$$E_b(m_1 = 30\,m_\odot,\, m_2 = 3\,m_\odot) \simeq 8.0 \cdot 10^{47}\,\mathrm{erg}$$

Quando viene ionizzata e fugge all'infinito, la pulsar acquista una velocità di rinculo media pari a 160.67 ± 75.53 km s^{-1}.

Escludendo le R e i SL, per il centro di massa della binaria di BH ricaviamo:

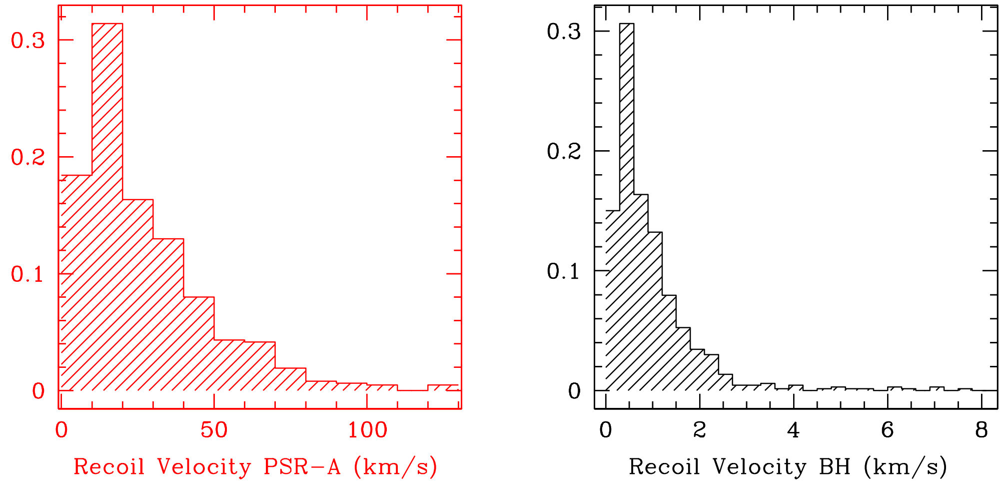


Figura 6.43: $m_1 = 50\,m_\odot$, $m_2 = 1.4\,m_\odot$. a) Velocità di rinculo della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte, ionizzazioni e sistemi quadrupli legati. b) Velocità di rinculo del BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e sistemi quadrupli legati.

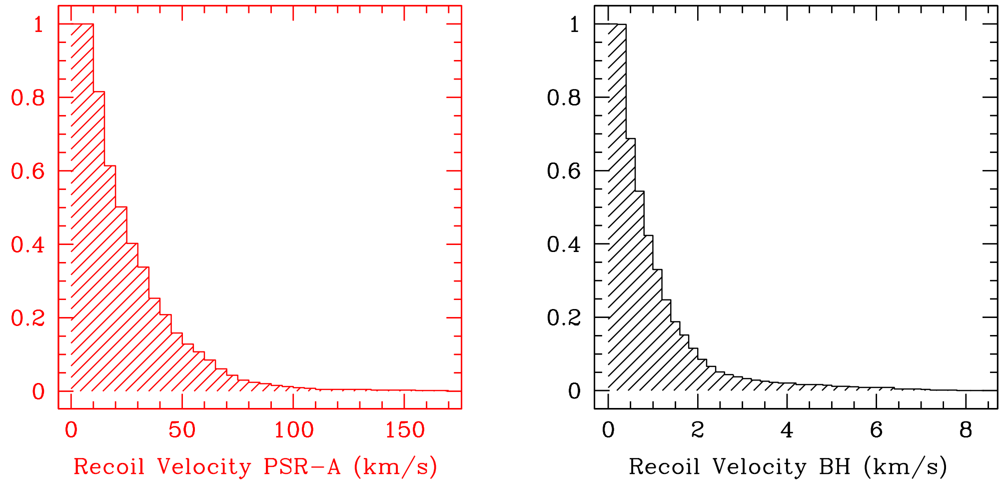


Figura 6.44: $m_1 = 50\,m_\odot$, $m_2 = 1.4\,m_\odot$. a) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo della PSR-A+co, senza R, I, SL. b) Distribuzione integrale delle velocità di rinculo del BH trascurando R e SL.

$\langle V_{BH} \rangle$	$0.95 \pm 0.95\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
$V_{rms\,BH}$	$1.34\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
$V_{pp\,BH}$	$0.45\ \mathrm{km\,s^{-1}}$

Eccentricità:

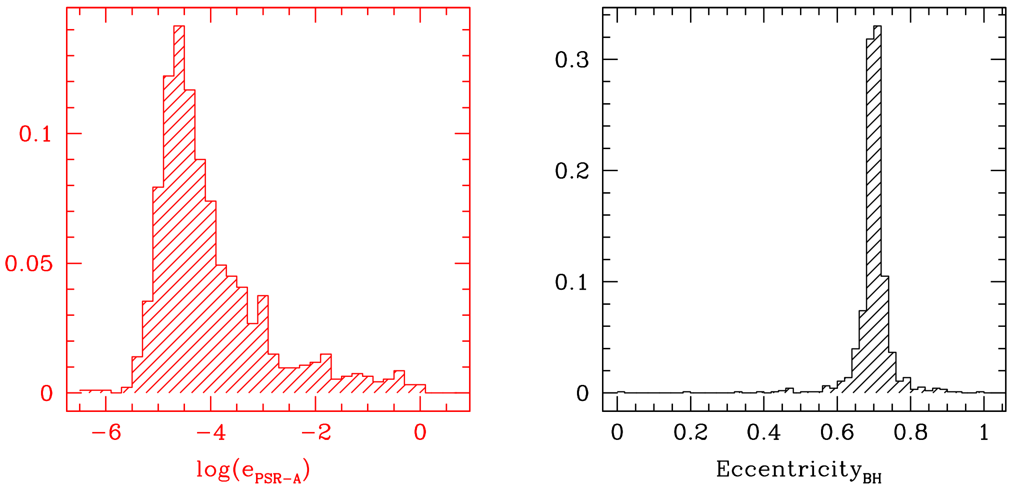


Figura 6.45: $m_1 = 50\, m_\odot$, $m_2 = 1.4\, m_\odot$. a) Eccentricità finale della PSR-A+co nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Eccentricità finale del BH nei casi in cui non si verificano risonanze irrisolte.

Trascurando le R e le I, le eccentricità finali del sistema risultano:

$\langle e_{PSR-A} \rangle$	$1.27 \cdot 10^{-2} \pm 1.27 \cdot 10^{-2}$
$e_{pp\,PSR-A}$	$2.51 \cdot 10^{-5}$
$\langle e_{BH} \rangle$	$6.982 \cdot 10^{-1} \pm 2.3 \cdot 10^{-2}$
$e_{pp\,BH}$	$7.03 \cdot 10^{-1}$

Considerazioni:

- I simboli impiegati sono stati definiti nella Sezione 2.1.a.
- Considerando il picco della distribuzione, l'eccentricità della PSR-A+co rimane pressoché inalterata.

Energia di legame:

Senza le risonanze irrisolte:

$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{BH}$	$3.5 \cdot 10^{-3} \pm 9.83 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{PSR-A}$	$-3.9 \cdot 10^{-2} \pm 2.02 \cdot 10^{-1}$

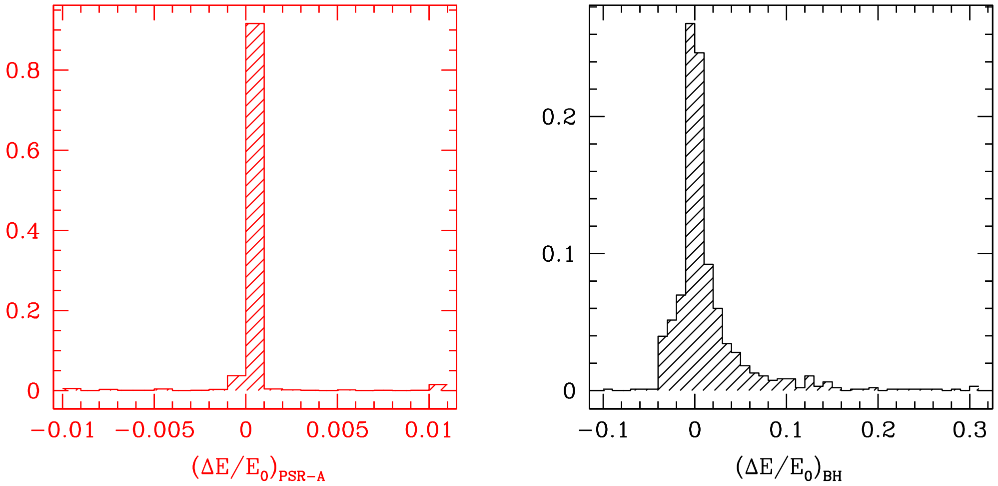


Figura 6.46: $m_1 = 50\, m_\odot$, $m_2 = 1.4\, m_\odot$. a) Variazione dell'energia di legame del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione dell'energia di legame della PSR-A+co trascurando le risonanze irrisolte.

Senza le risonanze irrisolte, le ionizzazioni e lo scambio:

$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{BH}$	$1.37 \cdot 10^{-2} \pm 4.74 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{PSR-A}$	$6.2 \cdot 10^{-3} \pm 3.47 \cdot 10^{-2}$

dove i simboli sono gli stessi usati nella Sezione 2.1.a.

Osservazioni:

- La variazione dell'energia di legame verifica la legge (2.68), con il parametro $\xi \simeq 0.44$.
- Quando si trascurano le ionizzazioni, l'energia di legame della PSR-A+co rimane pressoché immutata (variazione dello $\sim$ 0.6%).

Separazione orbitale:

Senza le risonanze irrisolte e le ionizzazioni la variazione media della separazione orbitale della PSR-A+co e della binaria di BH risultano:

$\langle \frac{\Delta a}{a_0} \rangle_{BH}$	$1.2 \cdot 10^{-2} \pm 3.9 \cdot 10^{-2}$
$\langle \mid \frac{\Delta a}{a_0} \mid \rangle_{BH}$	$2.1 \cdot 10^{-2} \pm 2.0 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta a}{a_0} \rangle_{PSR-A}$	$1.7 \cdot 10^{-3} \pm 2.37 \cdot 10^{-2}$
$\langle \mid \frac{\Delta a}{a_0} \mid \rangle_{PSR-A}$	$2.6 \cdot 10^{-3} \pm 2.6 \cdot 10^{-3}$

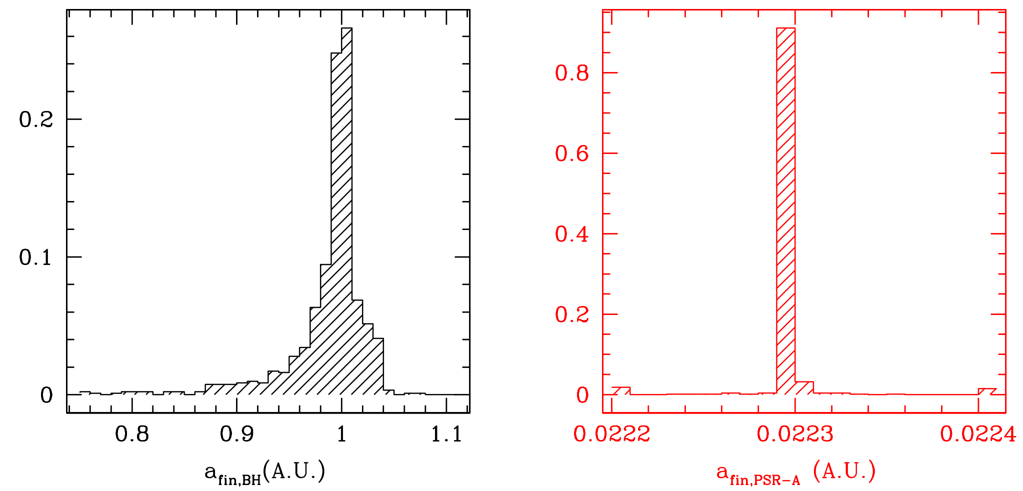


Figura 6.47: $m_1 = 50\,m_\odot$, $m_2 = 1.4\,m_\odot$. a) Variazione della separazione orbitale del BH trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni. b) Variazione della separazione orbitale della PSR-A+co trascurando risonanze irrisolte e ionizzazioni.

dove i simboli sono gli stessi usati nella Sezione 2.1.a.

Conclusioni:

Anche se le velocità di rinculo impartite alla PSR-A+co sono leggermente più basse del valore ideale necessario per portarla nella sua attuale collocazione, il sistema binario formato da un BH di 50 $m_\odot$ ed una stella di neutroni potrebbe spiegare la dinamica della pulsar binaria di NGC 6752.

6.2.5 Il random walk del BH

Un'altra questione di particolare importanza per comprendere la dinamica dei buchi neri e delle pulsar all'interno del core è la stima del random walk del buco nero (o della binaria di buchi neri). Infatti se il buco nero fosse sostanzialmente confinato al centro della buca di potenziale, i suoi effetti (quali ionizzazione delle binarie ed espulsione o cattura di stelle) sarebbero limitati alle regioni centrali (a meno che la massa dell'oggetto centrale sia $\gtrsim 1000\,m_\odot$). Se, al contrario, la velocità acquisita dal BH in seguito alle interazioni gravitazionali (distanti e ravvicinate), fosse tale da consentirgli di allontanarsi dal centro della buca, i suoi effetti si potrebbero riscontrare localmente in varie regioni dell'ammasso.

Se, ad esempio, il buco nero (o la binaria di buchi neri) potesse allontanarsi dal centro di almeno 0.1-0.5 pc, le perturbazioni indotte dalla sua presenza spiegherebbero i valori insoliti di $\dot{P}$ misurati per la PSR-B e per la PSR-E.

Interazioni distanti_ Per calcolare lo spostamento medio proiettato del buco nero indotto dalle interazioni distanti, utilizziamo la relazione (3.39), ricavata da Lin & Tremaine (1980) [58]:

$$\langle R_{BH}^2 \rangle^{1/2} \sim 0.01\,\mathrm{pc} \left(\frac{10^3\, M_\odot}{M_{BH}} \right)^{1/2} \left(\frac{r_c}{0.5\,\mathrm{pc}} \right)$$

Sostituendo in questa relazione i parametri di NGC 6752 (ossia raggio del core $r_c \simeq 0.11$ pc), si trova:

$$\langle R_{BH}^2 \rangle^{1/2} \sim 2.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{pc} \left(\frac{10^3\, M_\odot}{M_{BH}} \right)^{1/2} \qquad (6.3)$$

Scegliendo, ad esempio, $M_{BH} = 500\, m_\odot$, risulta $\langle R_{BH}^2 \rangle^{1/2} \sim 3 \cdot 10^{-3}$ pc. Si tratta di uno spostamento troppo piccolo per essere rivelato.

Interazioni ravvicinate_ Per quanto riguarda gli incontri stretti, bisogna, in primo luogo, stabilire se tali incontri sono più o meno importanti della frizione dinamica nell'influenzare il moto del buco nero. A tal fine, confrontiamo i corrispondenti tempi scala, ossia il tempo scala di collisione (t_{coll}, definito all'equazione 2.44), e il tempo scala di frizione dinamica (t_{df}, definito all'equazione 2.47).

$$\frac{t_{df}}{t_{coll}} \simeq 2.66 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a\, \sigma_*^2}{G\, m_*} \sim 0.18 \left(\frac{a}{1\,\mathrm{A.U.}} \right) \left(\frac{\sigma_*}{7\,\mathrm{km\,s^{-1}}} \right)^2 \left(\frac{m_\odot}{m_*} \right) \qquad (6.4)$$

dove m_* è la massa caratteristica delle stelle nel core dell'ammasso, σ_* la loro velocità di dispersione lungo la linea di vista ed a la separazione orbitale della binaria di buchi neri (o della stella del cusp).

Il rapporto tra t_{df} e t_{coll} *non dipende dalla massa del buco nero* ed indica che il tempo di frizione dinamica è più breve di un fattore 5 rispetto al tempo di collisione (se la separazione orbitale è pari a 1 A.U.). Si vedano anche, in Tabella 6.1, i valori di t_{df} e t_{coll} calcolati per ciascuno dei sistemi binari considerati in questo lavoro di Tesi. In tutti i casi $t_{df} < t_{coll}$, a meno che la separazione orbitale a sia maggiore di 1 A.U. (ad esempio, per $m_1 = 200\, m_\odot$, $m_2 = 10\, m_\odot$ $t_{df} > t_{coll}$ se $a \gtrsim 6$ A.U.).

Poiché il tempo di frizione dinamica è più breve del tempo di collisione, dopo ciascuna interazione gravitazionale il buco nero viene rapidamente

(m_1, m_2) $(m_\odot)$	a (A.U.)	t_{coll} (anni)	t_{df} (anni)
30, 3	1	$1.4445 \cdot 10^7$	$2.653 \cdot 10^6$
50, 10	1	$7.945 \cdot 10^6$	$1.459 \cdot 10^6$
200, 10	1	$2.270 \cdot 10^6$	$4.17 \cdot 10^5$
200, 10	2	$1.135 \cdot 10^6$	$4.17 \cdot 10^5$
200, 10	3	$7.57 \cdot 10^5$	$4.17 \cdot 10^5$
200, 10	4	$5.67 \cdot 10^5$	$4.17 \cdot 10^5$
200, 10	5	$4.54 \cdot 10^5$	$4.17 \cdot 10^5$
200, 10	6	$3.78 \cdot 10^5$	$4.17 \cdot 10^5$
200, 10	7	$3.24 \cdot 10^5$	$4.17 \cdot 10^5$
500, 1	1	$9.51 \cdot 10^5$	$1.75 \cdot 10^5$
500, 1	3	$3.17 \cdot 10^5$	$1.75 \cdot 10^5$

Tabella 6.1: Confronto tra il tempo scala di collisione e il tempo scala di frizione dinamica.

frenato per frizione dinamica e riportato al centro dell'ammasso, prima di poter fare nuovi scattering.

Sulla base di questa considerazione, diventa importante calcolare *la distanza di massimo allontanamento* dal centro della buca di potenziale a cui può arrivare il buco nero grazie alla velocità acquisita nel corso di una singola interazione. Assumendo che il potenziale nella regione centrale sia armonico (Merrit 2001 [64]), tale distanza è fornita dalla (3.52):

$$r_{max} = \sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho_c}} \langle v_{BH}^2 \rangle^{1/2} \tag{6.5}$$

dove ρ_c è la densità di massa nel core e $\langle v_{BH}^2 \rangle$ è la velocità quadratica media acquisita dal buco nero dopo una interazione stretta. Sostituendo a $\langle v_{BH}^2 \rangle$ i risultati delle nostre simulazioni, abbiamo calcolato le distanze di massimo allontanamento del buco nero per tutti i sistemi considerati in questo lavoro di Tesi (Tabella 6.2).

(m_1, m_2) $(m_\odot)$	a (A.U.)	$v_{rms\,BH}$ (km s^{-1})	r_{max} (pc)
30, 3	1	2.45	0.057
50, 10	1	2.62	0.061
200, 10	1	1.01	0.023
500, 1	1	0.47	0.011
500, 1	3	0.49	0.011

Tabella 6.2: Distanza di massimo allontanamento del BH dal centro dell'ammasso nell'ipotesi di potenziale armonico.

Dalla Tabella 6.2 si può vedere come soltanto per le binarie di buchi neri più leggere ($(30\, m_\odot, 3\, m_\odot)$ e $(50\, m_\odot, 10\, m_\odot)$) la distanza di massimo allontanamento è dell'ordine di grandezza del raggio del core ($\sim 0.1\,\mathrm{pc}$). Poiché la PSR-B e la PSR-E si trovano a circa 0.08 pc dal centro di gravità dell'ammasso, una binaria di buchi neri poco massiva potrebbe essersi spinta fino alla loro posizione. Tuttavia bisogna tener conto del fatto che la binaria di BH riesce a raggiungere il punto di massima elongazione solo per breve tempo, nelle fasi immediatamente successive allo scattering. Infatti, per la brevità di t_{df}, il moto della binaria di BH dopo lo scattering è paragonabile a quello di un oscillatore armonico rapidamente smorzato dalla frizione dinamica. E quindi la binaria di BH viene rapidamente frenata e riportata al centro della buca di potenziale. Pertanto l'ipotesi che l'accelerazione osservata delle pulsar possa essere dominata dall'accelerazione gravitazionale di un BH binario moderatamente massivo che, spostandosi per random walk, si venga a trovare vicino ad esse, presenta alcuni problemi.

6.2.6 Legame tra hardening per scattering, coalescenza per emissione di onde gravitazionali e accrescimento in massa della binaria di BH:

Ci sono due meccanismi attraverso i quali una binaria si può stringere fino eventualmente a coalescere:

- ◎ gli *scattering con stelle-binarie di campo*;
- ◎ l'emissione di *onde gravitazionali*.

Come abbiamo visto (Cap.2, eq. 2.48, eq. 2.51), il primo di questi processi ha un tempo scala $t_{hard} \propto \frac{1}{a}$, mentre il secondo ha un tempo scala $t_{gw} \propto a^4$. Quindi, inizialmente, quando la sua separazione orbitale è ancora larga, una binaria hard si stringe soprattutto a causa degli scattering; mentre il ruolo delle onde gravitazionali è trascurabile. In un secondo tempo, quando il suo semiasse è sufficientemente piccolo, la binaria si stringe soprattutto in virtù delle onde gravitazionali, mentre gli scattering sono irrilevanti.
La transizione tra i due regimi, quello in cui dominano gli scattering e quello in cui dominano le onde gravitazionali, si verifica quando:

$$t_{hard} = t_{gw}$$

ossia quando il semiasse maggiore è dato da:

$$a_{gw} = \left(\frac{256}{5} \frac{G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2) \sigma_*}{(1-e^2)^{7/2} c^5 \rho_* H} \right)^{1/5} \quad \text{(cfr. 2.52)} \qquad (6.6)$$

Ovviamente:

- se $a_0 > a_{gw}$, il tempo necessario perché la separazione orbitale della binaria passi da a_0 ad a_{gw} è in prima approssimazione $t_{hard} = \frac{(a_0 - a_{gw})}{a_0\, a_{gw}} \frac{\sigma_*}{(2\pi G \xi \rho_*)}$ (cfr. 2.57);
- se $a_1 < a_{gw}$, il tempo necessario perchè la separazione orbitale passi da a_{gw} ad a_1 è in prima approssimazione $t_{gw} = \frac{5}{256} \frac{c^5 (1-e^2)^{7/2}}{G^3 m_1 m_2 (m_1+m_2)} (a_{gw}^4 - a_1^4)$ (cfr. 2.49).

Il tempo complessivo t_{TOT} necessario per passare dalla separazione orbitale a_0 alla separazione a_1 risulta:

$$
\begin{aligned}
t_{TOT} &= t_{hard,\, a_0 \to a_{gw}} + t_{gw,\, a_{gw} \to a_1} \\
&= \frac{(a_0 - a_{gw})}{a_0\, a_{gw}} \frac{\sigma_*}{(2\pi G \xi \rho_*)} + \frac{5}{256} \frac{c^5 (1-e^2)^{7/2}}{G^3 m_1 m_2 (m_1+m_2)} (a_{gw}^4 - a_1^4)
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Se scegliamo $a_1 \approx 0$, t_{TOT} è il tempo necessario perché una binaria di separazione orbitale iniziale a_0 arrivi a coalescenza sotto l'effetto combinato di scattering e onde gravitazionali.

Applicando tale metodo ai sistemi che sono stati studiati in questo lavoro di Tesi, si ottengono i risultati riportati nella Tabella 6.1 (dove abbiamo posto $\sigma_* = 7\ \mathrm{km\,s^{-1}}$, $\rho_* = m_\odot\, n_*$, $n_* = 10^5 \mathrm{pc}^{-3}$, $\xi = 0.2$, $e = 0.7$).

(m_1, m_2) $(m_\odot)$	a_0 (A.U.)	a_{gw} (A.U.)	t_{hard} (yr^{-1})	t_{gw} (yr^{-1})	t_{TOT} (yr^{-1})
(30, 3)	1	0.188	$1.0316 \cdot 10^{10}$	$1.2700 \cdot 10^{10}$	$2.3016 \cdot 10^{10}$
(50, 10)	1	0.298	$5.613 \cdot 10^9$	$7.997 \cdot 10^9$	$1.3610 \cdot 10^{10}$
(200, 10)	1	0.505	$2.334 \cdot 10^9$	$4.717 \cdot 10^9$	$7.051 \cdot 10^9$
(200, 10)	2	0.505	$3.526 \cdot 10^9$	$4.717 \cdot 10^9$	$8.243 \cdot 10^9$
(200, 10)	3	0.505	$3.923 \cdot 10^9$	$4.717 \cdot 10^9$	$8.640 \cdot 10^9$
(200, 10)	4	0.505	$4.121 \cdot 10^9$	$4.717 \cdot 10^9$	$8.839 \cdot 10^9$
(200, 10)	5	0.505	$4.241 \cdot 10^9$	$4.717 \cdot 10^9$	$8.958 \cdot 10^9$
(200, 10)	6	0.505	$4.320 \cdot 10^9$	$4.717 \cdot 10^9$	$9.037 \cdot 10^9$
(200, 10)	7	0.505	$4.377 \cdot 10^9$	$4.717 \cdot 10^9$	$9.094 \cdot 10^9$
(500, 1)	1	0.456	$2.848 \cdot 10^9$	$5.231 \cdot 10^9$	$8.078 \cdot 10^9$
(500, 1)	3	0.456	$4.436 \cdot 10^9$	$5.231 \cdot 10^9$	$9.667 \cdot 10^9$

Tabella 6.3: Stime analitiche del tempo di hardening per interazioni gravitazionali e del tempo di merging per emissione di onde gravitazionali per i sistemi considerati in questa Tesi.

Questa procedura analitica, tuttavia, sovrastima il tempo di coalescenza, per due motivi.

1. Trascurare il ruolo degli scattering nel regime dominato dalle onde gravitazionali e viceversa trascurare queste ultime quando sono più importanti i primi è corretto solo in prima approssimazione. In realtà questi due processi sono sempre compresenti.

2. Questa procedura non tiene conto della *crescita in massa della binaria di BH* per cattura e distruzione mareale di stelle incoming.
   L'aumento della massa del BH riduce il tempo di coalescenza per emissione di onde gravitazionali.

L'**evoluzione globale della binaria di BH** può essere descritta solo tenendo conto di tutti i processi che la influenzano:

1. **scattering con le stelle di campo**;

2. **emissione di onde gravitazionali**;

3. **crescita in massa del BH per cattura mareale di stelle**.

Gli scattering con le stelle di campo provocano un restringimento del semiasse maggiore descritto dalla 2.43:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -(2\pi\xi)\frac{G\rho_*}{\sigma_*}a^2$$

L'emissione di onde gravitazionali provoca anch'essa un restringimento del semiasse maggiore, descritto dalla 2.49, che al primo ordine diventa:

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_{gw} = -\frac{64}{5}\frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^3 (1-e^2)^{7/2}}$$

Tenendo conto di entrambi i processi, il tasso di restringimento del semiasse maggiore risulta:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \left(\tfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_{ej} + \left(\tfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_{gw} \\ &= -(2\pi\xi)\tfrac{G\rho_*}{\sigma_*}a^2 \; - \; \tfrac{64}{5}\tfrac{G^3 m_1 m_2 (m_1+m_2)}{c^5 a^3 (1-e^2)^{7/2}} \end{aligned} \tag{6.8}$$

La crescita in massa della binaria, o meglio della sua componente più massiva, si può ricavare nel modo seguente.

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = m_* \left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_t \tag{6.9}$$

dove m_1 è la massa della componente più massiva della binaria, m_* è la massa media delle stelle di campo e $\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_t$ è il numero di stelle che vengono catturate e distrutte per interazioni mareali nell'unità di tempo.

Analogamente a quanto detto per gli scattering, il tasso di cattura per interazioni mareali è dato da

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_t = n_* \Sigma_t \, \sigma_* \tag{6.10}$$

dove n_* è la densità di stelle, σ_* la velocità tipica imperturbata di una stella di campo e Σ_t la sezione d'urto per interazioni mareali.
In prima approssimazione, le stelle catturate sono quelle che al pericentro hanno una distanza dalla componente più massiva della binaria $\leq r_t$ (dove r_t è il raggio mareale), ossia quelle che hanno un parametro di impatto $\leq (2Gm_1 r_t)^{1/2} \, \sigma_*^{-1}$. Quindi $\Sigma_t = \pi b_{max}^2 = 2\pi G m_1 r_t / \sigma_*^2$.
Siccome $r_t \equiv r_* \left(\frac{m_1}{m_*}\right)^{1/3}$, dove r_* è il raggio medio di una stella di campo, la 6.10 diventa:

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_t = n_* \frac{2\pi G m_1}{\sigma_*} \, r_* \left(\frac{m_1}{m_*}\right)^{1/3} \tag{6.11}$$

Quindi l'equazione 6.9 risulta:

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi G}{\sigma_*} n_* r_* m_*^{2/3} \, m_1^{4/3} \tag{6.12}$$

Pertanto, l'evoluzione della binaria di BH è descritta dal sistema di due equazioni in due incognite (a ed m_1)[3]:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -(2\pi\xi) \frac{G\rho_*}{\sigma_*} a^2 \, - \frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1+m_2)}{c^5 (1-e^2)^{7/2}} \frac{1}{a^3} \\ \\ \frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi G}{\sigma_*} n_* r_* m_*^{2/3} \, m_1^{4/3} \end{cases} \tag{6.13}$$

Poiché questo sistema non è risolubile analiticamente, l'abbiamo calcolato numericamente, utilizzando un integratore *Runge-Kutta al IV ordine*. I risultati sono riassunti nelle Tabelle 6.2-6.4 e visualizzati nelle Figure 6.42-6.43.

Conclusioni:

[3]Se la seconda componente della binaria fosse così massiva da avere anch'essa un tasso di crescita in massa non trascurabile, dovremmo aggiungere una terza equazione per l'incognita m_2, ossia:

$$\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi G}{\sigma_*} n_* r_* m_*^{2/3} \, m_2^{4/3}$$

Poiché per i sistemi che abbiamo considerato vale sempre l'ipotesi $m_1 \gg m_2$, ci siamo limitati a considerare solo le equazioni per a ed m_1.

Tabella 6.4: $m_1 = 30m_\odot$, $m_2 = 3m_\odot$, $a_0 = 1$ A.U.

tempo (yr)	$a(t)$ (A.U.)	$\dot{a}(t)$ (A.U.yr^{-1})	m_1 ($m_\odot$)	$\dot{m}_1$ ($m_\odot$ yr^{-1})
10^5	0.999958002	-4.195340899$\cdot 10^{-10}$	30.000115094	1.149791517$\cdot 10^{-9}$
10^6	0.999580564	-4.192174438$\cdot 10^{-10}$	30.001149930	1.14984440$\cdot 10^{-9}$
10^7	0.995821794	-4.160706033$\cdot 10^{-10}$	30.011500910	1.150373388$\cdot 10^{-9}$
10^8	0.959732506	-3.864600579$\cdot 10^{-10}$	30.115273085	1.155680042$\cdot 10^{-9}$
10^9	0.704437078	-2.082085387$\cdot 10^{-10}$	31.179801420	1.210467125$\cdot 10^{-9}$
10^{10}	0.191339254	-1.59999922$\cdot 10^{-11}$	45.206848785	1.986373224$\cdot 10^{-9}$
$1.972800011 \cdot 10^{10}$	**0.014569451**	$3.727858435 \cdot 10^{-9}$	71.692539612	$3.673560182 \cdot 10^{-9}$
$1.972900011 \cdot 10^{10}$	< 0 : coalescenza			

Tabella 6.5: $m_1 = 50m_\odot$, $m_2 = 10m_\odot$, $a_0 = 1$ A.U.

tempo (yr)	$a(t)$ (A.U.)	$\dot{a}(t)$ (A.U.yr^{-1})	m_1 ($m_\odot$)	$\dot{m}_1$ ($m_\odot$ yr^{-1})
10^5	0.999958001	-4.19548407$\cdot 10^{-10}$	50.000227431	2.272049796$\cdot 10^{-9}$
10^6	0.999580550	-4.192317675$\cdot 10^{-10}$	50.002272332	2.272173693$\cdot 10^{-9}$
10^7	0.995821651	-4.160849952$\cdot 10^{-10}$	50.022727472	2.273413125$\cdot 10^{-9}$
10^8	0.959731033	-3.864752314$\cdot 10^{-10}$	50.227893858	2.285854043$\cdot 10^{-9}$
10^9	0.704415447	-2.082410872$\cdot 10^{-10}$	52.342642795	2.41506821$\cdot 10^{-9}$
10^{10}	0.179953267	-2.156506147$\cdot 10^{-11}$	81.840253994	4.382727786$\cdot 10^{-9}$
$1.304000011 \cdot 10^{10}$	**0.01901538648**	-9.611888772$\cdot 10^{-9}$	96.752081180	5.478592013$\cdot 10^{-9}$
$1.304100011 \cdot 10^{10}$	< 0 : coalescenza			

Tabella 6.6: $m_1 = 200m_\odot$, $m_2 = 10m_\odot$, $a_0 = 1$ A.U.

tempo (yr)	$a(t)$ (A.U.)	$\dot{a}(t)$ (A.U.yr^{-1})	m_1 ($m_\odot$)	$\dot{m}_1$ ($m_\odot$ yr^{-1})
10^5	0.999957973	-4.198289397$\cdot 10^{-10}$	200.00144410	1.442666834$\cdot 10^{-8}$
10^6	0.999580269	-4.195124448$\cdot 10^{-10}$	200.01442867	1.442791717$\cdot 10^{-8}$
10^7	0.995818838	-4.163671375$\cdot 10^{-10}$	200.14433614	1.444041292$\cdot 10^{-8}$
10^8	0.959702102	-3.867741113$\cdot 10^{-10}$	201.44961980	1.456611749$\cdot 10^{-8}$
10^9	0.703977108	-2.089184128$\cdot 10^{-10}$	215.14911886	1.590161746$\cdot 10^{-8}$
$6.773430102 \cdot 10^9$	**0.006837219**	-2.751663048$\cdot 10^{-6}$	340.90905660	2.937468767$\cdot 10^{-8}$

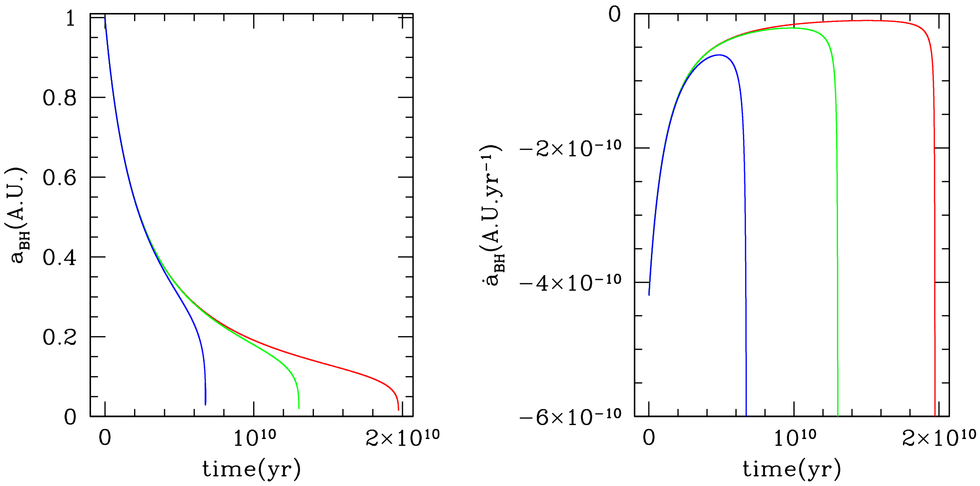


Figura 6.48: Evoluzione temporale del semiasse maggiore $a(t)$ e della sua derivata $\dot{a}$ per le binarie con $m_1 = 30m_\odot$, $m_2 = 3m_\odot$ (*rosso*), $m_1 = 50m_\odot$, $m_2 = 10m_\odot$ (*verde*), $m_1 = 200m_\odot$, $m_2 = 10m_\odot$ (*blu*).

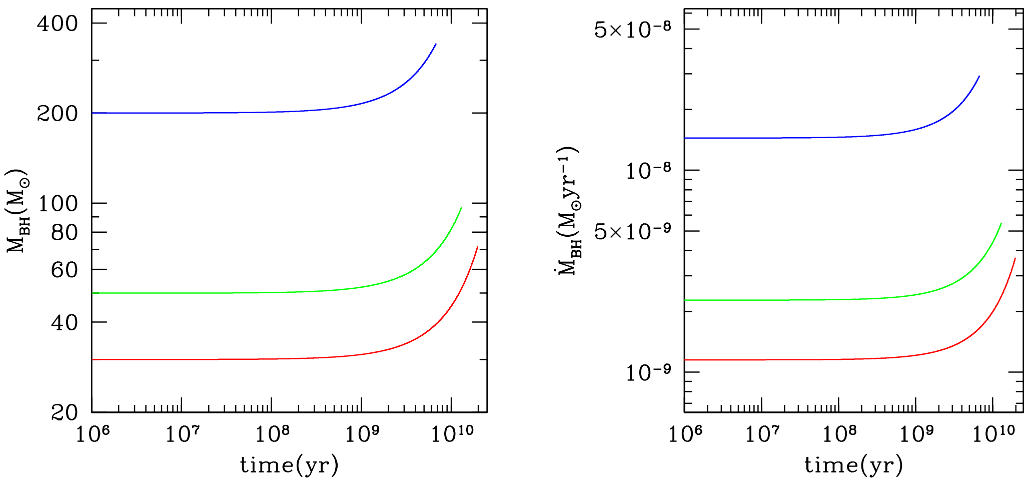


Figura 6.49: Andamento temporale della massa del BH e della sua derivata $\dot{M}_{BH}$ per le binarie con $m_1 = 30m_\odot$, $m_2 = 3m_\odot$ (*rosso*), $m_1 = 50m_\odot$, $m_2 = 10m_\odot$ (*verde*), $m_1 = 200m_\odot$, $m_2 = 10m_\odot$ (*blu*).

- Il tempo di coalescenza ottenuto dalle simulazioni è molto simile a quello calcolato con il procedimento illustrato all'inizio di questa sezione, soprattutto per i sitemi più massivi.
  Come si vede dalla Tabella 6.7, l'errore compiuto trascurando la crescita in massa e la compresenza degli scatering e delle onde gravitazionali in ogni stadio della vita della binaria è inferiore al 5% per i sistemi più massivi, al 20% per il meno massivo ($m_1 = 30\, m_\odot$, $m_2 = 3\, m_\odot$).

Tabella 6.7: Confronto tra il tempo di coalescenza calcolato semi-analiticamente ($t_{TOT\,1}$) e quello calcolato numericamente ($t_{TOT\,2}$)

(m_1, m_2) $(m_\odot)$	$t_{TOT\,1}$ (yr)	$t_{TOT\,2}$ (yr)	$t_{TOT\,1} - t_{TOT\,2}$ (yr)	$(t_{TOT\,1} - t_{TOT\,2})/t_{TOT\,2}$
30, 3)	$2.30159 \cdot 10^{10}$	$1.97290 \cdot 10^{10}$	$3.2869 \cdot 10^{9}$	0.167
50, 10	$1.36103 \cdot 10^{10}$	$1.30410 \cdot 10^{10}$	$5.6930 \cdot 10^{8}$	0.044
200, 10	$7.05119 \cdot 10^{9}$	$6.77343 \cdot 10^{9}$	$2.7776 \cdot 10^{8}$	0.041

- La variazione del semiasse maggiore non differisce molto da un sistema all'altro fino a $\sim 10^9$ anni. Non a caso si tratta del periodo in cui l'effetto dominante è rappresentato dagli scattering, e il $\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_{ej}$ non dipende dalla massa della binaria. I sistemi si differenziano dopo un tempo superiore ai 10^9 anni, quando comincia a diventare importante il termine $\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_{gw}$, che invece dipende dalla massa delle componenti della binaria.

- La crescita in massa del BH in 10^{10} anni è significativa, soprattutto se il BH - seme era già abbastanza massivo: il BH di massa $m_1 = 200 m_\odot$ è pressoché raddoppiato.
  Questa circostanza è interessante per spiegare la formazione di eventuali IMBH negli ammassi globulari. Confermando quanto detto al Capitolo 3, abbiamo qui evidenziato che la **cattura mareale di stelle è un meccanismo efficace per la crescita in massa di un BH in un ammasso globulare, ma purché la sua massa iniziale sia $\gtrsim \mathbf{30 - 50\, m_\odot}$.**

- Il rischio che la binaria di BH coalesca, riducendosi a un singolo, sembra scongiurato. Infatti una binaria con un semiasse maggiore pari a 1 A.U. impiega $\sim 10^{10}$ anni per coalescere. Questo dato, tenendo conto anche del fatto che, in generale, le binarie primordiali e quelle nate per scambio hanno separazioni orbitali iniziali > 1 A.U., indica che ci sono buone probabilità perché una binaria di BH moderatamente massiva sopravviva fino ai tempi attuali.

Sviluppi futuri:

Numerose sono le questioni che rimangono ancora da affrontare per capire la dinamica degli incontri gravitazionali negli ammassi globulari e soprattutto per evidenziare il ruolo di un BH singolo o binario in tale contesto. In particolare, le strade su cui ci possiamo muovere a partire dalle conclusioni di questo lavoro di Tesi sono le seguenti.

- Sarebbe preferibile disporre di un campione di simulazioni più vasto, in modo da ridurre al minimo le fluttuazioni statistiche. Questo permetterebbe una determinazione più precisa di parametri fondamentali quali l'eccentricità e gli scambi energetici.

- Occorre descrivere meglio i processi che portano alla crescita in massa di un eventuale BH in un ammasso globulare e, nel caso del BH binario, alla sua evoluzione orbitale (con particolare riferimento all'emissione di onde gravitazionali), al fine di porre dei limiti più precisi al range di masse possibili. In particolare, nelle equazioni da noi utilizzate nella Sezione 2.5 del Cap.6 non si tiene conto del flusso di stelle bound, della crescita in massa del BH più leggero, delle variazioni locali della densità e della velocità di dispersione delle stelle.

- Potrebbe essere interessante indagare ulteriormente i processi di formazione di buchi neri di massa intermedia, seguendo, ad esempio, le strade proposte recentemente da R. P. van der Marel (2003) [61].

- Da un punto di vista più teorico-generale sarebbe interessante indagare meglio il modello del cusp di un BH. In particolare, vorremmo capire se e come correlano tra di loro il flusso stazionario di stelle verso il loss cone e l'eiezione di stelle in seguito ad incontri ravvicinati con singole stelle del cusp.

- Il codice a 4 corpi scritto per questo lavoro di Tesi può essere impiegato per verificare se l'espulsione della PSR-A potrebbe essere avvenuta in seguito a incontri gravitazionali (flyby e scambi) con binarie costituite da stelle (e non solo da buchi neri).

Appendice A

M-σ relation

Con il nome *"mass versus σ relation"* si indica una correlazione, ricavata dai dati sperimentali, tra la massa del BH e la velocità di dispersione stellare, valida per le galassie ellittiche e i bulge delle galassie a spirale (Gebhardt et al. 2000 [35], Ferrarese & Merritt 2000 [26]).
Tale relazione si può esprimere nella forma:

$$M_{BH} = \alpha + \beta \log \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \tag{A.1}$$

con $\sigma_0 = 200$ km/s.
I coefficienti α e β sono controversi; ma i dati più recenti (Tremaine et al. 2002 [93]) danno:

$$\alpha = 8.13 \pm 0.06 \qquad \beta = 4.02 \pm 0.32$$

Finora non è ancora stata trovata una motivazione teorica certa per questa indubbia correlazione empirica (molto più evidente, ad esempio, della *Magorrian relation*).
Un punto di grande interesse è la domanda se tale correlazione si può estendere anche a sistemi con velocità di dispersione più bassa di quella delle galassie giganti, come le dwarf ellittiche e gli ammassi globulari.
Infatti l'estendibilità o meno della $M - \sigma$ a questi sistemi permetterebbe, forse, di capire qualcosa in più sull'eventuale legame tra galassie giganti da una parte, dwarf ellittiche e ammassi globulari dall'altra (Gebhardt et al. 2002 [36]).

Appendice B

Validità generale del codice

Al Capitolo 5 abbiamo detto che il nostro codice a 4 corpi integra solo un caso particolare di interazioni binaria - binaria, ossia quelle interazioni in cui le due binarie interagenti hanno momenti angolari di spin orientati nello stesso verso. In realtà i risultati ottenuti hanno validità generale, indipendentemente dall'orientazione iniziale degli spin; come abbiamo evidenziato nel seguente modo.

Modificando opportunamente le equazioni che collegano i parametri iniziali alle variabili di integrazione, è possibile estendere la validità del nostro codice ai seguenti casi.

1. Il caso in cui le due binarie inizialmente hanno entrambe il piano orbitale parallelo al piano xy, ma *spin opposti*.

2. Il caso in cui inizialmente una delle due binarie ha piano orbitale parallelo al piano xy; mentre l'altra ha piano orbitale parallelo al piano xz.

3. Il caso in cui inizialmente una delle due binarie ha piano orbitale parallelo al piano xy; mentre l'altra ha piano orbitale parallelo al piano yz.

Abbiamo effettuato una serie di simulazioni, con gli stessi parametri iniziali, per i 3 casi appena elencati e per il caso (utilizzato per effettuare tutte le simulazioni analizzate nella Tesi) in cui le binarie hanno piani orbitali paralleli e spin paralleli. I risultati che abbiamo ricavato sono riassunti nella seguente tabella.

	piano orbitale xy spin allineati	piano orbitale xy spin opposti	piano orbitale yz spin allineati	piano orbitale xz spin allineati
Probabilità di ionizzazione	0.05	0.04	0.05	0.07
$\langle V_{PSR-A} \rangle$ (km s^{-1})	25.98 ± 18.75	26.84 ± 22.72	25.96 ± 23.18	24.69 ± 22.51
$\langle V_{BH} \rangle$ (km s^{-1})	0.81 ± 0.58	0.84 ± 0.71	0.81 ± 0.72	0.77 ± 0.70
$\langle e_{PSR-A} \rangle$	$4.34 \cdot 10^{-2} \pm 9.4 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-2} \pm 1.7 \cdot 10^{-2}$	$6.5 \cdot 10^{-3} \pm 6.4 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-3} \pm 3.1 \cdot 10^{-3}$
$e_{pp\,PSR-A}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{BH}$	$2.0 \cdot 10^{-2} \pm 7.2 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-2} \pm 7.0 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-2} \pm 7.1 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2} \pm 7.0 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta E}{E_0} \rangle_{PSR-A}$	$1.2 \cdot 10^{-3} \pm 1.26 \cdot 10^{-2}$	$8.6 \cdot 10^{-3} \pm 7.54 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-3} \pm 1.00 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-3} \pm 1.00 \cdot 10^{-2}$
$\langle \frac{\Delta a}{a_0} \rangle_{BH}$	$1.6 \cdot 10^{-2} \pm 5.1 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2} \pm 4.9 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2} \pm 4.9 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2} \pm 4.8 \cdot 10^{-2}$
$\langle \mid \frac{\Delta a}{a_0} \mid \rangle_{BH}$	$2.60 \cdot 10^{-2} \pm 1.8 \cdot 10^{-3}$	$2.34 \cdot 10^{-2} \pm 1.8 \cdot 10^{-3}$	$2.30 \cdot 10^{-2} \pm 1.8 \cdot 10^{-3}$	$2.10 \cdot 10^{-2} \pm 1.8 \cdot 10^{-3}$
$\langle \frac{\Delta a}{a_0} \rangle_{PSR-A}$	$1.0 \cdot 10^{-3} \pm 1.12 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-3} \pm 4.46 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-3} \pm 9.3 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3} \pm 1.5 \cdot 10^{-3}$
$\langle \mid \frac{\Delta a}{a_0} \mid \rangle_{PSR-A}$	$1.4 \cdot 10^{-3} \pm 1.4 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-3} \pm 6.3 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3} \pm 1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3} \pm 1.2 \cdot 10^{-3}$

Parametri utilizzati per tutti e tre i casi considerati:

$m_1 = 50\, m_\odot$, $m_2 = m_3 = 1.4\, m_\odot$, $m_4 = 0.2\, m_\odot$

a_{BH}= 1 A.U.,a_{PSR-A}= 0.0223 A.U.

a_{BH}= 0.7, $a_{PSR-A} = 10^{-5}$

Conclusioni:

- I dati riportati in tabella mostrano che *non vi è alcuna sostanziale dipendenza dei parametri post-scattering (eccentricità, velocità di rinculo, variazioni dell'energia di legame,...) dall'orientazione iniziale dello spin delle binarie.* Questo è un risultato ragionevole, dal momento che lo spin della binaria di campo è almeno tre ordini di grandezza inferiore al momento angolare relativo dei centri di massa delle binarie.

- Visto che i 4 casi considerati forniscono una mappatura completa dello spazio, e visto che gli esiti degli scattering non differiscono in modo sensibile da un caso all'altro, è ragionevole pensare che i risultati delle nostre simulazioni, anche se riferiti per la maggior parte solo al caso 1, hanno validità generale, indipendentemente dall'orientazione relativa degli spin delle binarie.

Bibliografia

[1] Abel, T., Bryan, G. L., & Norman, M. L. 2002, Sci. 295, 93

[2] Aarseth, S. J., & Hills, J. G. 1972, A&A, 21, 255

[3] Aarseth, S. J., & Lecar, M. 1975, ARA&A, 13, 1

[4] Aarseth, S. J. 1985, IAUS, 113, 251

[5] Auriere, M. & Ortolani, S. 1989, A&A, 221, 20

[6] Bacon, D., Sigurdsson, S., & Davies, M. B. 1996, MNRAS, 281, 830

[7] Bahcall, J. N., & Wolf, R. A. 1976, ApJ, 209, 214

[8] Binney, J., & Tremaine S. 1987, Galactic dynamics, Princeton University Press

[9] Bolte, M. 1991, ApJ, 376, 514

[10] Bolte, M. 1992, ApJS, 82, 145

[11] Bromm, V., Ferrara, A., Coppi, P. S., & Larson, R. B. 2001, MNRAS., 328, 969

[12] Bromm, V., Coppi, P. S., & Larson, R. B. 2002, ApJ, 564, 23

[13] Chazy, J. 1929, J. Math. Pures Appl., 8, 353

[14] Cohn, H. N., Lugger, P. M., Grabhorn, R. P. et al. 1991, The formation and evolution of star clusters, 381

[15] Colbert, E. J. M., & Mushotzky, R. F. 1999 AdSpR, 23, 847

[16] Colpi, M., Possenti, A., & Gualandris, A. 2002, ApJ, 570, L85

[17] D'Amico, N., Possenti, A., Fici, L., et al. 2002, ApJ, 570, L89

[18] Davies, M. B., Benz, W., & Hills, J. G. 1992, ApJ, 401, 246

[19] Davies, M. B., Benz, W., & Hills, J. G. 1993, ApJ, 411, 285

[20] Davies, Melvyn B., & Hansen, Brad M. S. 1998, MNRAS, 301, 15

[21] Davies, Melvyn B. 2002, ASP: Stellar Exotica Produced from Stellar Encounters, 265

[22] Duncan, M. J., & Shapiro, S. L. 1982, ApJ, 253, 921

[23] Duncan, M. J., & Shapiro, S. L. 1983, ApJ, 268, 565

[24] Ferguson, A. M. N., & Johnson, R. A. 2001, ApJ, 559, L13

[25] Ferguson, A. M. N., Irwin, M. J., Ibata, R. A., Lewis, G. F. & Tanvir, N. R. 2002, AJ, 124, 1452

[26] Ferrarese, L., & Merritt, D. 2000, ApJ, 539, L9

[27] Ferraro, F. R., Possenti, A., Sabbi, E., Lagani, P., Rood, R. T., D'Amico, N., & Origlia, L. 2003, ApJ, submitted

[28] Frank, J., & Rees, M. J. 1976, MNRAS, 176, 633

[29] Fregeau, J. M., Joshi, K. J., Portegies Zwart, S. F., & Rasio, F. A. 2002, ApJ, 570, 171

[30] Fryer, C. L. 1999, ApJ, 522, 413

[31] Fryer, C. L., Woosley, S. E., & Heger, A. 2001, ApJ, 550, 372

[32] Fryer, C. L., & Kalogera, V. 2001, ApJ, 554, 548

[33] Fryer, C. L., Heger, A., Langer, N., & Wellstein, S. 2002, ApJ, 578, 335

[34] Fullerton, L. W., & Hills, J. G. 1982, AJ, 87, 175

[35] Gebhardt, K., et al. 2000, ApJ, 539, L13

[36] Gebhardt, K., Rich, R. M., & Ho, L. C. 2002, ApJ, 578, L41

[37] Gerssen, J., van der Marel, R. P., Gebhardt, K., Guhathakurta, P., Peterson, R. C., & Pryor C. 2002, ApJ, 124, 3270

[38] Goodman, J. & Hernquist, L. 1991, ApJ, 378, 637

[39] Goodman, J., & Hut, P. 1993, ApJ, 403, 271

[40] Grindlay, J. E. 1999, ASP 157: Annapolis Workshop on Magnetic Cataclysmic Variables, 377

[41] Gunn, J. E., Griffin, R. F. 1979, AJ, 84, 752

[42] Harrington, R. S.1975, AJ, 80.1081

[43] Heger, A., Woosley, S., Baraffe, I. & Abel, T. 2002, Lighthouses of the Universe: The Most Luminous Celestial Objects and Their Use for Cosmology, Proceedings of the MPA/ESO/, 369

[44] Heger, A., Woosley, S. E., Fryer, C. L., & Langer, N. 2002, atro-ph/0211062

[45] Heggie, D. C. 1975, MNRAS.173, 729

[46] Henon, M. 1969, A&A, 2, 151

[47] Hills, J.G. 1975, AJ, 80, 809

[48] Hills, J. G., & Fullerton, L. W. 1980, AJ, 85, 1281

[49] Hills, J.G. 1983, AJ, 88, 1269

[50] Hills, J.G. 1983, AJ, 88, 1857

[51] Hills, J. G.1989, AJ, 97, 222

[52] Hut, P., & Bahcall, J. N. 1983, ApJ, 268, 319

[53] Hut, P. 1993, ApJ, 403, 256

[54] Kaaret, P., Prestwich, A. H., Zezas, A., Murray, S. S., Kim, D.-W., Kilgard, R. E., Schlegel, E. M., & Ward, M. J. 2001, MNRAS, 321, 29

[55] Kulkarni, S. R., Hut, P., & McMillan, S. 1993, Natur., 364, 421

[56] Larson R. B. 1998, MNRAS, 301, 569

[57] Lightman, A. P., & Shapiro, S. L. 1977, ApJ, 211, L244

[58] Lin, D. N. C.; Tremaine, S. 1980, ApJ, 242, 789

[59] Marchant, A. B., & Shapiro, S. L. 1979, ApJ, 234, 317

[60] Marchant, A. B., & Shapiro, S. L. 1980, ApJ, 239, 685

[61] van der Marel, R. P., astro-ph/0302101

[62] Matsumoto, H., Tsuru, T. G., Koyama, K., Awaki, H., Canizares, C. R., Kawai, N., Matsushita, S., & Kawabe, R. 2001, ApJ, 547, 25

[63] McMillan, S. L. W. 1986, ApJ, 307, 126

[64] Merritt, D. 2001, ApJ, 556, S245

[65] Meylan, G., Sarajedini, A., Jablonka, P., Djorgovski, S. G., Bridges, T., & Rich, R. M. 2001, AJ, 122, 830

[66] Miller, M. C., & Hamilton, D. P. 2002, ApJ, 576, 894

[67] Miller, M. C., & Hamilton, D. P. 2002, MNRAS, 330, 232

[68] Nakamura, F., & Umemura, M. 2001, ApJ, 548, 19

[69] Peebles, P. J. E. 1972, ApJ, 178, 371

[70] Peters, P. C. 1964, Gravitational radiation and the motion of two point masses, Phys. Rev. B136, 1224-1232

[71] Phinney, E. S., & Sigurdsson, S. 1991, Natur., 349, 220

[72] Phinney, E. S. 1993, ASP 50: Structure and Dynamics of Globular Clusters, 141

[73] Portegies Zwart, S. F., & McMillan, S. L. W. 2000, ApJ, 528, L17

[74] Portegies Zwart, S. F., McMillan, S. L. W. 2002, ApJ, 576, 899

[75] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. & Flannery B. P. 1988, Numerical Recipes in C, Cambridge University Press

[76] Pryor, C. P. 1985, IAUS, 113, 99

[77] Pryor, C., McClure, R. D., Hesser, J. E., & Fletcher, J. M. 1989 Ph.D. Thesis Colorado Univ., Boulder., 5

[78] Pryor, C., & Meylan, G. 1993, ASP 50: Structure and Dynamics of Globular Clusters, 357

[79] Pylyser, E. H. P. & Savonije, G. J.1989, A&A, 208, 52

[80] Quinlan, G. D.1996, NewA, 1, 35

[81] Quinlan, G. D., & Hernquist, L. 1997, NewA, 2, 533

[82] Rasio, F. A., McMillan, S., & Hut, P. 1995, ApJ, L438, 33

[83] Rubenstein, E. P., & Bailyn, C. D. 1997, ApJ, 474, 701

[84] Rubenstein, E. P., & Bailyn, C. D. 1999, ApJ, 513, L33

[85] Shapiro, S. L. 1977, ApJS, 214, 566

[86] Shapiro, S. L., & Marchant, A. B. 1978, ApJ, 225, S603

[87] Sigurdsson, S., & Hernquist, L. 1993, Natur., 364, 423

[88] Sigurdsson, S., & Phinney, E. S. 1993, ApJ, 415, S631

[89] Sigurdsson, S., & Phinney, E. S. 1995, ApJ, 99, S609

[90] Spitzer, Lyman, Jr. 1969, ApJ, 158, 139

[91] Spitzer, L., Jr., & Chevalier, R. A. 1973, ApJS, 183, 565

[92] Spitzer, L., 1987, Dynamical Evolution of Globular Cluster, Princeton University Press

[93] Tremaine, S., Gebhardt, K., Bender, R. et al. 2002, ApJ, 574, 740

[94] Verbunt, F., 1993, ARA&A, 31, 93

Indice

GRAZIE

- A Monica Colpi e Andrea Possenti, che mi hanno guidato passo passo con i loro consigli (accordandomi la loro fiducia e sopportando con pazienza i miei errori), ma soprattutto sono riusciti a contagiare persino la sottoscritta (scettica-indifferente-annoiata irrecuperabile) con il loro entusiasmo per l'Astrofisica.

- Ad Alessia Gualandris, che per prima mi ha aiutato a sgrezzare la mia assoluta ignoranza informatica e mi è stata sempre vicina con la sua amicizia e collaborazione.
  A Marta Volonteri, i cui consigli e la cui pazienza sono stati n! volte la mia ancora di salvezza.

- Al fior fiore dell'Astrofisica bicocchiana (ovvero Alessandro, Andrea, Anna, Antonio, Claudio, Jerry, Loris, Luca, Roberto & Silvia) e meratese (Serena & Susanna).

- Alla prof. Annalisa Longoni, che ha sempre avuto fiducia in me, anche quando valevo nihil assis, alla dolcissima e indimenticabile Francesca Milesi e al mio avvocato Stefania Gallo, che ormai da 11 anni mi sopporta e mi tira fuori dai pasticci.

- Al Maestro e ai colleghi della Scuola d'Arte, che mi hanno reso infinitamente più lievi e piacevoli gli impegni di questi mesi.

- Alla mamma.

Δεδυκε μεν α σελαννα
και Πληϊαδες...
(Σαπφω)